Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy
24 февраля

Содержание

1. Смешанные стратегии

Случайность – остутствие системы. Вероятность – “частота”.

Грубо говоря, разыгрывание трех стратегий с равной вероятностью = применение с одинаковой частотой, т.е. каждую стратегию вы используете **приблизительно** $\frac{n}{3}$ раз

Определение 1.1: **Смешанные стратегии** – вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad (1)$$

Ожидаемый выигрыш 1 игрока

$$K_1(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (2)$$

Пример:

		Жена	
		Ф	Б
Муж	Ф	$2, 3$	$0, 0$
	Б	$1, 1$	$3, 2$

Мужа $\eta^* = (q^*, 1 - q^*)$
Жены $\sigma^* = (p^*, 1 - p^*)$

$$K_M(S_{\text{М}}^1, \sigma^*) = K_{\text{М}}(S_{\text{М}}^2, \sigma^*) \quad (3)$$

где $S_{\text{М}}^1$ – Муж на Ф, $S_{\text{М}}^2$ – Муж на Б

$$\text{М} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Ж} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$(1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} = (0, 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$2p^* = 3 - 2p^* \Rightarrow p^* = \frac{3}{4} \Rightarrow \sigma^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad (6)$$

$$K_{\text{Ж}}(\eta^*, S_{\text{Ж}}^1) = K_{\text{Ж}}(\eta^*, S_{\text{Ж}}^2) \Rightarrow \eta^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad (7)$$

Примечание:
2) Условие общего положения: $a \neq e, c \neq g, b \neq d, h \neq f$

Задача **1.1**:

(R, C)	1	2
1	$(5, 0)$	$(3, 1)$
2	$(5, 2)$	$(3, 0)$

$\sigma_R = (p, 1-p) \quad \sigma_C = (q, 1-q)$

$$K_R(\sigma_R, \sigma_C) = (p \;\; 1-p)\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = 3 - 2q \tag{8}$$

не зависит от $\sigma_R \Longrightarrow \forall \sigma_R$ является наилучшим ответом на $\forall \sigma_C$

$$K_C(\sigma_R, \sigma_C) = p + q(2 - 3p) \tag{9}$$

увеличивание $q \Rightarrow$ возрастает при $p < \frac{2}{3}$, убывает при $p > \frac{2}{3}$, не зависит от q при $p = \frac{2}{3}$. Тогда можем сказать что

- $p < \frac{2}{3}$: $(p, 1-p), (1, 0)$
- $p > \frac{2}{3}$: $(p, 1-p), (0, 1)$
- $p = \frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (q, 1-1)q \in [0, 1]$

1.1. О смешанных равновесиях в симметричных играх

Симметричные игры – игры, задаваемые такими квадратными матрицами A и B, что $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$. Симметричный профиль (σ, σ), где $\sigma = (p_1, ..., p_m)$ и $p_j \neq 0 \forall j$, является симметричными равновесием Нэша для симметричной игры, заданной $(m \times m)$-матрицей A ттогда, когда

$$A \cdot \sigma = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = K(\sigma, \sigma) \tag{10}$$

В частности, если A невырождена, то

$$\sigma = \lambda \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

и значит, возможно лишь одно такое равновесие, и оно существует ттогда, кода координаты (11) положительны

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ 1 & -1 & -a \end{pmatrix} \quad a \neq 0 \tag{12}$$

(i)

$$(\sigma,\sigma), \sigma=(p_1,p_2,p_3), p_j>0, \sum p_j=1$$

$$\det A = -a(a^2+3)\neq 0$$

$$\sigma=\lambda A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{a(a^2+3)}\begin{pmatrix}1+a^2 & 1+a & 1-a\\ 1-a & 1+a^2 & 1+a\\ 1+a & 1-a & 1+a^2\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\lambda=K(\sigma,\sigma)=(p_1\ \ p_2\ \ p_3)A\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=-a(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}&=-a(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\frac{-1}{a(a^2+3)}\begin{pmatrix}1+a^2 & 1+a & 1-a\\ 1-a & 1+a^2 & 1+a\\ 1+a & 1-a & 1+a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}p_1^2+p_2^2+p_3^2\\p_1^2+p_2^2+p_3^2\\p_1^2+p_2^2+p_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\Rightarrow\\ &\Rightarrow \begin{matrix}p_1=p_2=p_3\\p_1+p_2+p_3=1\end{matrix}\Rightarrow p_1=p_3=p_3=\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{14}$$

Ответ: $\sigma^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(ii) $\sigma=(p,1-p,0)$

$$\begin{aligned}\tilde{A}=\begin{pmatrix}-a & 1\\-1 & -a\end{pmatrix}&\Rightarrow\tilde{\tilde{A}}=\begin{pmatrix}1-a & 2\\0 & 1-a\end{pmatrix}\Rightarrow\\ &\Rightarrow\sigma_1^*=\left(\frac{a+1}{2a},\frac{a-1}{2a},0\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$K(\sigma_1^*,\sigma_1^*)=-\frac{1}{2a}(a^2+1)\quad K(3,\sigma_1^*)=\frac{1}{a} \tag{16}$$

(σ_1^*,σ_1^*) равновесие $\Leftrightarrow -\frac{1}{2a}(a^2+1)\geq\frac{1}{a}\Rightarrow a<-1$

Ответ:

$$\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\sigma_1^*&=\left(\frac{a+1}{2a},\frac{a-1}{2a},0\right)\\ \sigma_2^*&=\left(\frac{a-1}{2a},0,\frac{a+1}{2a}\right)\\ \sigma_3^*&=\left(0,\frac{a+1}{2a},\frac{a-1}{2a}\right)\end{aligned}\right\}a<-1\\ &\sigma_4^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),a\neq 0\end{aligned} \tag{17}$$