Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

17 февраля

Содержание

1 Полезность

Пример. Рассмотри игру, похожую на покер. В данный момент есть две возможности – играть или "спасовать". При игре сравниваются карты и в случае выигрыша мы получаем 90 рублей, в случае проигрыша терям 60 рублей. Известно, что с вероятностью $\frac{1}{3}$ мы выиграем. Альтернатива – пасовать и потерять 20. Стоит ли играть?

Вычислим мат. ожидание:

$$E = 90 \cdot \frac{1}{3} + (-60) \cdot 23 = -10 > 20$$

Хороший ли это критерий?

Пример. На выбор:

1. Получить 1 млн
2. Получить 2 млн с вероятностью $\frac{1}{2}$

$$E(A) = E(B)$$

Действительно ли эти варианты эквивалентны?

Пример. Игра в рулетку

Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...
Выигрыш	2	4	8	16	...

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

За возможность сыграть – любые деньги?

Замечание. Мат. ожидание – плохой критерий.

Определение. Полезность – мера удовлетворения агента.

Замечание. Предположение – для каждого агента существует функция полезности и он стремится максимизировать ее мат. ожидание.

Определение. X – множество альтернатив (событий).
Операция:

$$A, B \in X \implies \alpha A + (1 - \alpha) B \in X$$

Отношения:

$$\succ, =$$

- $A \succ B$: A предпочтительнее B
- $A = B$: не имеет мести ни $A \succ B$, ни $B \succ A$

У агента задано **отношение предпочтения**.

Аксиома 1. ***Аксиома полноты.*** *$\forall A, B$ верно одно из трех:*

- $A \succ B$
- $B \succ A$
- $A = B$

Аксиома 2. ***Аксиома порядка (транзитивности).***

$$A \succ B, B \succ C \implies A \succ C$$

$A \succ B \implies A$ имеет большую полезность, чем B. Как определить разницу этих событий? Вводится понятие риска

Определение. Пусть $A, B \in X, \alpha \in [0, 1]$

$$C = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B$$

C – **лотерея**, которая имеет два исхода с определенными вероятностями

Аксиома 3. ***Аксиома непрерывности.*** *Пусть \(A, B, C $\in X$, $A \succ B$, $B \succ C \implies$)$\exists \alpha \in (0, 1)$: $(\alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot C) \succ B$*

Аксиома 4. ***Аксиома независимости от несущественных альтернатив (AHHA).*** *Если $A \succ B \implies$*

$$\forall C \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot C \succ \alpha B + (1 - \alpha) \cdot C$$

Теорема 1.1 (Теорема об ожидаемой полезности (теорема фон Неймана))**.** Если отношение предпочтения удовлетворяет аксиомам 1 - 4, тогда существует такая функция U, что предпочтение задается ее математическим ожиданием. При этом функция U определена с точностью до положительного аффинного преобразования:

$$\forall x, y \in \Delta X, \exists U : \Delta X \to R : \quad x \succ y \Leftrightarrow EU(x) > EU(y)$$

, где ΔX – множество лотерей

Определение. Нормальная форма игры

$$G = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}\}$$

- N – конечное множество игроков
- $X_i, i \in N$ – множество стратегий игрока $i \in N$
- $K_i : \prod_{i \in N} X_i \to R$ – функция выигрыша игрока $i \in N$

Определение. или игры с противоположными интересами (с нулевой суммой)
или матричные игры

Конечная антагонистическая игра задается матрицей $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $a_{ij} = K_1(i, j)$ – выигрыш первого игрока
- $X_1 = \{1, \dots, n\}$ – стратегии первого игрока
- $X_2 = \{1, \dots, m\}$ – стратегии второго игрока

$$K_1(i, j) + K_2(i, j) \equiv 0 \forall i \in X_1, j \in X_2$$

Пример. Орел - решка

(I, II)	Орел	Решка
Орел	$1, -1$	$-1, 1$
Решка	$-1, 1$	$1, -1$

Пример. Камень-Ножницы-Бумага

(I)	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	0	1	-1
Ножницы	-1	0	1
Бумага	1	-1	0

Пример. **Дилема заключенного**.

Два мошенника арестованы в связи с преступлением. Однако оказывается, что если никто из них не сознается, их осудят лишь за более мелкое правонарушение. Поэтому полиция делает каждому из арестованных одно и то же предложение (но в разных комнатах, так что они не имеют возможность обсудить вопрос между собой): если вы сознаетесь, что вы вдвоем совершили серьезное преступление, а ваш приятель не сознается, то вас освободят, а ваш напарник будет заключен в тюрьму на 6 лет; если вы оба сознаетесь, то оба получите по 4 года; если ни один из вас не сознается, то вы оба проведете в тюрьме 2 года за совершение более мелкого преступления.

(I, II)	Сознаться	Не сознаться
Сознатья	$-4, 4$	$0, 6$
Не сознаться	$-6, 0$	$-2, 2$

Определение. Осторожные стратегии. Выбираем стратегию так, чтобы минимизировать свой возможный проигрыш.

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

- $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ – нижная цена игры
- $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ – верхная цена игры

Если $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$, то есть седловая точка, а v – цена игры

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Первый в строке, второй в столбце. Для первого лучшая 2 для второго 3 (т.к. с минусом).

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\{1, 3, -2\} = 3 \quad \min_j \max_i a_{ij} = \min\{10, 4, 3, 10\} = 3$$

Цена игры – 3

1.1 Доминирование стратегий

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Стратегия 2 доминирует стратегию 1. Какую бы стратегий не выбрал второй игрок, выигрышь в стратегии 2 всегда не меньше выигрыша стратегии 1

Определение. Говорят, что стратегия x' доминирует стратегию x'' игрока 1 в $(m \times n)$-игре G_A, если для всех чистых стратегий $j \in \{1, \dots, n\}$ игрока 2 выполняются неравенства

$$x'a^j \geq x''a^j$$

Аналогично для 2 игрока:

$$a_i y' \leq a_i y''$$

Стратегии эквивалентны, если $x'a^j = x''a^j$. Если $x' \sim x''$, то $K(x', y) = K(x'', y)$

Определение. Стратегия s_1 строго доминируется стратегией s_2 того же игрока (или s_2 строго доминирует s_1), если для этого игрока всегда выгоднее применть стратегию s_2, как бы не поступил оппонент.

$$K_1(s_2, r) > K_1(s_1, r) \quad \forall r \in X_2, s_1, s_2 \in X_1$$

Теорема 1.2 (о доминировании)**.** Если i-я стратегия доминируема, то i-я строка может быть вычеркнута из матрицы, при этом цена игры не изменяется, а оптимальная стратегия может быть получена из новой оптимальной стратегии расширением на i-м месте

Если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X, i = \overline{1, m+1}$, то расширением стратегии x на i-м месте будут называться вектор $x_i = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$

1.1.1 Метод исключения доминируемых стратегий

Все игроки разумны! Принцип всеобщего признания разумности

	1	2	3
1	5, 0	5, 4	0, 3
2	0, 4	0, 3	5, 2

Вторая стратегия второго игрока доминирует третью

	1	2
1	5, 0	5, 4
2	0, 4	0, 3

Первая стратегия первого игрока доминирует вторую

	1	2
1	5, 0	5, 4

Вторая стратегия второго игрока доминирует первую

	2
1	5, 4

Недостатки:

- Доминируемые стратегия не всегда есть

1.2 Оптимальность по Парето

Ситуация $x = (x_1, \dots, x_n)$ в игре G называется опимальной по Парето, если не существует такой ситуации $y = (y_1, \dots, y_n)$, в которой

$$K_i(y) \geq K_i(x) \quad \forall i \in N$$

и хотя бы для одного игрока это неравенство строго

Теорема 1.3. В конечной бескоалиционной игре существуют оптимальные по Парето ситуации

Пример. Дилема заключенного. Оптимальность по Парето

Профиль (не сознаться, не сознаться) эффективный (или оптимальный по Парето), если не существует другого исхода, который увеличил бы платеж одного игрока, не ухудшив платеж другого

(I, II)	Сознаться	Не сознаться
Сознаться	-4, -4	0, -6
Не сознаться	-6, 0	-2, -2

Недостатки:

- **Множество** Парето оптимальных точек

1.3 Равновесия по Нэшу

Определение. (x_1^*, x_2^*) – равновесия по Нэшу, если

$$K_1(x_1^*, x_2^*) \geq K_1(x_1, x_2^*) \quad \forall x_1 \in X_1$$

$$K_2(x_1^*, x_2^*) \geq K_2(x_1^*, x_2) \quad \forall x_2 \in X_2$$

Ни один не может улучшить ситуацию для себя

Пример. Дилема заключенного:

(I, II)	Сознаться	Не сознаться
Сознаться	-4, -4	0, -6
Не сознаться	-6, 0	-2, -2

$(-4, -4)$ – ситуация равновесия.

1.4 Смешанные стратегии

Определение. Смешанные стратегии – вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Ожидаемый выигрыш 1 игрока

$$K_1(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Теорема 1.4 (о минимаксе, фон Нейман)**.**

$$\max_x \min_y x^T A y = \min_y \max_x x^T A y$$

1.5 Поиск равновесия по Нешу

Лемма 1 (о равенстве платежей)**.** *Пусть $\sigma_R^* = (p^*, 1-p^*)$ и $\sigma_C^* = (q^*, 1-q^*)$ задают ситуацию в игру двух игроков с двумя возможными стратегиями s_R^1, s_R^2 и S_C^1, S_C^2.*

1. *Если $0 < p^* < 1$, то σ_R^* является лучшим ответом на σ_C^*, т.е.*

$$\forall \sigma_R \; K_R(\sigma_R^*, \sigma_C^*) \geq K_R(\sigma_R, \sigma_C^*) \Leftrightarrow K_R(s_R^1, \sigma_C^*) = K_R(s_R^2, \sigma_C^*)$$

и, следовательно,

$$\forall \sigma_R K_R(\sigma_R^*, \sigma_C^*) = K_R(s_R^1, \sigma_C^*) = K_R(S_R^2, \sigma_C^*) = K_R(\sigma_R, \sigma_C^*)$$

2. *Если $0 < 1^* < 1$, то σ_C^* является лучшим ответом на σ_R^*, т.е.*

$$\forall \sigma_C \; K_C(\sigma_R^*, \sigma_C^*) \geq K_C(\sigma_R^*, \sigma_C) \Leftrightarrow K_C(\sigma_R^*, S_C^1) = K_C(\sigma_R^*, S_C^2)$$

и, следовательно,

$$\forall \sigma_C K_C(\sigma_R^*, \sigma_C^*) = K_C(\sigma_R^*, S_C^1) = K_C(\sigma_R^*, S_C^2) = K_C(\sigma_R^*, \sigma_C)$$

3. *Если $0 < p^* < 1$ и $0 < q^* < 1$, то (σ_R^*, σ_C^*) является равновесием по Нэшу ттогда, когда*

$$K_R(s_R^1, \sigma_C^*) = K_R(s_R^2, \sigma_C^*)$$

и

$$K_C(\sigma_R^*, S_C^1) = K_C(\sigma_R^*, S_C^2)$$

Выполняются одновременно

Пример. Игра "Семейный спор". Муж и жена обсуждают, как провести свободный вечер. Они хотели бы провести его вместе, но муж хотел бы пойти в театр на балет, а жена на футбол.

Стоимость событий:

- "быть вместе 2 единицы
- "провести вечер по своему вкусу 1 единица

Муж / Жена	Футбол	Балет
Футбол	(2, 3)	(0, 0)
Балет	(1, 1)	(3, 2)

$\sigma_H^* = (p, 1-p); \sigma_W^* = (q, 1-q)$

$$A_H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A_W = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Доделать}}$