Практика 1

Ilya Yaroshevskiy

1 сенятбря

Содержание

Определение. Код:
n - длина кода
k - размерность кода
d - минимальное расстояние
Код записывается через (n, k) или (n, k, d). Количество кодовых слов Q^k

Определение. $F_2 = \{0, 1\}$ – двоичный код

Обозначение. $C = (n, k) \subset F_2^n$

Как нужно выбирать эту последовательность: выбираем базис. Записываем базисные вектора в матрицу $G_{n\times k}$. Кодовое слово из кода можно получить $c = uG$, где u (инфорамационный вектор) – вектор длины k, $n \geq k$

Определение. G – **Порождающая матрица**

$$\begin{array}{c} \text{Шум} \\ \downarrow \\ \cdots \xrightarrow{u} \boxed{uG} \xrightarrow{c} \boxed{\text{Модулятор}} \xrightarrow{x} \boxed{\text{Канал}} \xrightarrow{y} \boxed{\text{Демодулятор}} \rightarrow \boxed{\text{Декодер}} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

d – минимальное количество символов, в которых отличаются любые два вектора из кода C

Пример. $C = (4, 1)$

$$G_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кодовые слова:

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$d = 4$

Определение. Проверочная матрица H, такая что $G_{n\times k} H^T_{n\times k} = 0$. Если проверка проходит, то правильно декодировали код, либо выбрали вектор, который является кодовым словом

$$G = \begin{pmatrix} I \big| A \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} A^T \big| -I \end{pmatrix}$$

Задача 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \text{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Задача 2. Найти проверочную матрицу по порождающей

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{H} = \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Можем переставлять только строки, перестановка столбцов **меняет** код

Задача 3. Вывести формулу для логорифмических отношений правдоподобия

$$\mathcal{L} = \log \frac{P(x_i = 0|y_i)}{P(x_i = 1|y_i)} = \frac{2y_i}{\sigma^2} =$$

В случае канала с аддитивным белым гаусовским шумом и двоично фазовой модуляцией: $y_i = (-1)^{x_i} + \eta_i$, $\eta_i \sim \mathcal{N}(o, \sigma^2)$

Решение.

$$= \log \frac{P(x_i = 0) \cdot P(y_i|x_i = 0)}{P(x_i = 1) \cdot P(y_i|x_i = 1)} = \log \frac{P(y_i|x_i = 0)}{y_i|x_i = 1}$$

Плотность вероятности $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$F_Y(y) = f(y) = P(Y \leq y)$
$P(a \leq Y \leq b) = F_Y(b) - F_Y(a)$
$P(Y = y_i) = \lim_{dy \to 0} F_Y(y_i + dy) - F_Y(y_i) = f(y)dy$

$$= \log \frac{dy\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}}{dy\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}} = \log e^{\frac{-(y_i-1)^2 + (y_i+1)^2}{2\sigma^2}} = \frac{2y_i}{\sigma^2}$$

Задача 4. Доказать что декодирование по максимому правдоподобия ($\hat{c} = \mathrm{argmax}_{c \in C} P(y)$) некоторго коды для кодовых слов переданных по каналу с аддитивным гаусовским шумом эквивалентно декодирование по минимому расстоянию эвклида ($\hat{c} = \mathrm{argmin}_{c \in C} d_{\mathcal{E}}(c, y)$)

Решение.

$$\hat{c} = \mathrm{argmax}_{c \in C} P(y) = \mathrm{argmax} \prod_t P(y_t|c_t) = \mathrm{argmax} \sum_t -\frac{(y_t - c_t)^2}{2\sigma^2} = \mathrm{argmin} \sum_t (y_t - c_t)^2$$

$$\hat{c} = \mathrm{argmin}_{c \in C} d_{\mathcal{E}}(c, y) = \mathrm{argmin} \sqrt{\sum_t (y_t - c_y)^2} = \mathrm{argmin} \sum_t (y_t - c_t)^2$$