Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

5 октября

Содержание

1 Алгебраические термы

Определение.

$$T ::= a|(f\ T_1 \dots T_n)$$

Пример.

$$f_1\ (f_2\ a\ b)\ c$$

1.1 Подстановка переменных

Определение. Подстановка:

- $S_0 : V \to T$ — тождественно почти всюду (кроме конечного количества)
- $T_1 = T_2$ — **уравнение**
  Решение: такая подстановка S, что $S(T_1) \equiv S(T_2)$

Пример.

$$f\ a\ (g\ c) = f\ (g\ d)\ b$$

Положим:

- $S_0(a) = g\ d$
- $S_0(b) = g\ c$

$$S_0(f\ a\ (g\ c)) = f\ (g\ d)\ (g\ c) = S_0(f\ (g\ d)\ b)$$

1.2 Эквивалентность уравнений и систем

Определение. Две системы: $E_1 : \begin{cases} T_1 = P_1 \\ \vdots \\ T_{\text{n}} = P_{\text{n}} \end{cases}$, $E_2 : \begin{cases} T_1{}' = P_1{}' \\ \vdots \\ T_{\text{n}}{}' = P_{\text{n}}{}' \end{cases}$ называются **эквивалентными**, если любое решение системы E_1 подходит к E_2 и наоборот

Утверждение. *Для системы* $\begin{cases} T_1 = P_1 \\ \vdots \\ T_n = p_n \end{cases}$ *существует эквивалентное уравнение*

Доказательство. Выберем k — новый ф.с. n-местный интервал

$$T_1 \ \dots \ T_n = h \ P_1 \ \dots \ P_n$$

□

Определение. Определим порядок на подстановках: $S \le T$, если S — частный случай T: существует подстановка U, что $S = U \circ T$

Определение. $U \circ T$:

$$(U \circ T)(P) = U(T(P))$$

Определение. **Наиболее общим решением** $T = P$ назовем подстановку S, что для любой S_1: $S_1(T) \equiv S_1(P)$ выполнено $S_1 \le S$ и $S(T) = S(P)$

Теорема 1.1. У уравнения в алгебраических термах $T = P$ всегда есть наиболее общее решение, если есть хоть какое-то

Определение. **Несовместные система** — система с уравнением вида:

$$f \ T_1 \dots T_k = g \ P_1 \dots P_n$$

, где $k \ne n$, либо $f \ne g$ либо $x = \dots \ x \ \dots$.

Примечание. В Haskell и OCamll — «occurs check»

Определение. Система в **разрешенной форме** $\begin{cases} a_1 = T_1 \\ \vdots \\ a_n = T_n \end{cases}$, где

1. все a различны
2. T_i не содержит a_j

1.3 Алгоритм унификации

Рассмотрим систему $\begin{cases} T_1 = P_1 \\ \vdots \\ T_n = P_n \end{cases}$:

1. $x = x$ — отбрасываем
2. $T = x$, где $T \not\equiv x \implies x = T$
3. $$\begin{cases} x = P \\ \vdots \\ T_2 = P_2 \\ \vdots \\ T_n = P_n \end{cases} \implies \begin{cases} T_2[x := P] = P_2[x := P] \\ \vdots \\ T_n[x := P] = P_n[x := P] \\ \vdots \\ x = P \end{cases}$$

4. $f\ T_1\ \dots\ T_n = f\ P_1\ \dots\ P_n \implies \begin{cases} T_1 = P_1 \\ \vdots \\ T_n = Pn \end{cases}$

Теорема 1.2. Применяя шаги алгоритма унификации, за конечное время можно получить систему либо в разрешенной форме, либо несовместной

1.4 Вывод типов в $\lambda_{\to}$

Примечание. $(\to)$ — двуместный функциональный символ
Индукция по структуре λ-выражения

1. x — введем тип α_x.
   Система: $\varnothing$
   Тип: α_x

2. $A\ B$ — рекурсивный вызов, $\langle E_A, \tau_A\rangle, \langle E_B, \tau_B\rangle$
   Система: $E_A \cup E_B \cup \{\tau_B \to \beta = \tau_A\}$
   Тип: β

3. $\lambda x.A$ — рекурсивный вызов $\langle E_A, \tau_A\rangle$
   Система: E_A
   Тип: $\alpha_x \to \tau_A$

Разрешение системы: унификация (перепишем $\alpha \to \beta$ в алгебраических термах — $\to\ \alpha\ \beta$)

Пример.

$$\overbrace{\lambda x.\underbrace{x}_{A}}^{B}$$

- $E_A = \varnothing$, $\tau_A = \alpha_x$
- $E_B = \varnothing$, $\tau_B = \alpha_x \to \alpha_x$

$$\begin{cases} \tau_A = \alpha \\ \tau_B = \alpha \to \alpha \end{cases}$$

— эта система в разрешенной форме

$$\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha$$

Определение. Терм называется **слабо-нормализуемым**, если существует последовательность β-редукция, приводящая его к нормальной форме

Определение. Терм — **сильно-нормализуем**, если не существует бесконечной последовательность β-редукций, не приводящая к нормальной форме

Теорема 1.3. $\lambda_{\to}$ сильно нормализуемо

2 Исчисление предикатов 2 порядка

Хотим писать $\forall p.p \lor \neg p$

Определение. Логика 2 порядка

$$\Phi_\Pi ::= p \mid \Phi_\Pi \lor \Phi_\Pi \mid \Phi_\Pi \& \Phi_\Pi \mid \Phi_\Pi \to \Phi_\Pi \mid \forall p.\Phi_\Pi \mid \exists p.\Phi_\Pi \mid \ \perp$$

Утверждение. *Можно выразить:*

- $a \& b \coloneqq \forall p.(a \to b \to p) \to p$
- $a \lor b \coloneqq \forall p.(a \to p) \to (b \to p) \to p$
- $\perp \coloneqq \forall p.p$

- $\exists p.A \coloneqq \forall x.(\forall p.A \to x) \to x$, $(\exists p.A \approx \neg\forall p.\neg A)$

Определение. L_2 – лямбда исчисление 2 порядка (Система F)

$$L_2 ::= x \mid \lambda x^{\alpha}.A \mid P\ Q \mid \Lambda\alpha.A \mid P\ \tau$$

Пример.

- $id : \alpha \to \alpha$. $id \equiv \Lambda\alpha.\lambda x^{\alpha}.x$, $id\ (Int)\ 5$

3 Практика

3.1 ДЗ 3.6

$$A^{\eta\to\eta\to\eta}\ M^{\eta}\ N^{\eta}\ f^{\alpha\to\alpha}\ a : \alpha : \alpha$$

- $\vdash x : \eta, \alpha \to \alpha, \alpha$
- $P\ Q\ ?$
- $(\lambda x^{\tau}.P^{\pi})^{\tau\to\pi}\ A^{\tau} : \pi$, $\pi \equiv \alpha$ Гиганский тип выражения A окажется в переменной x в P

3.2 Черчевский нумералы в F

$$\Lambda\alpha.\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x^{\alpha}.f \dots f(x) : \eta : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

$$(+) = \Lambda\alpha.\lambda a^{\eta}.\lambda b^{\eta}.\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x^{\alpha}.(a\ \alpha)\ f\ ((b\ \alpha)\ f\ x)$$

3.3 Правила

Примечание.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.A : \forall\alpha.\varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \forall\alpha.\varphi}{\Gamma \vdash A\ \pi : \varphi[\alpha \coloneqq \pi]}$$