

Лекция 3

Луа Yaroshevskiy

28 сентября

Содержание

1 Изоморфизм Карри-Ховарда

1

Примечание. Зачем λ_{\rightarrow} ?

1. Логические выражения \supset
2. Запрещенные выражения
 - Y — явно нехорошо
 - $\Phi_A =_{\beta} \Phi_A \supset A$

Добавим очевидные аксиомы

- $A =_{\beta} B$, то $\vdash A \supset B$ и $\vdash B \supset A$
- $(A \supset A \supset B) \supset (A \supset B)$
- $A, A \supset B$, то B

Тогда при любом A , $\vdash A$

Примечание.

$$\Phi_A \equiv Y (\lambda x. x \supset A)$$

1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Определение.

$$\frac{\frac{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}{\Gamma \vdash A : \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A B : \tau}}{\Gamma \vdash A B : \tau} \quad \frac{\Gamma, \tau \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau}}{\Gamma \vdash \tau} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash A : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma, \sigma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \tau}}$$

Если $\Gamma \vdash A : \tau$, то

- A — эквивалентно доказательству τ
- τ — выражения в ИИВ
- Обитаемость типа — доказуемость τ
- Тип λ -абстракции — импликация
- ...

Обозначение. $|\Gamma|$ — оставляем только типы

Теорема 1.1 (об изоморфизме Карри-Ховарда).

- $\Gamma \vdash_{\lambda_{\rightarrow}} A : \tau$, то $|\Gamma| \vdash_{\rightarrow} \tau$
- Если $\Delta \vdash_{\rightarrow} \tau$, то найдутся Γ, A : $|\Gamma| = \Delta$, $\Gamma \vdash A : \tau$

Определение. Импликационный фрагмент ИИВ — оставляем правила $I_{\rightarrow}, E_{\rightarrow}, Ax$

Обозначение. $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \tau$ — доказуемость в И.Ф. ИИВ

Теорема 1.2. Импликационный фрагмент ИИВ замкнут относительно доказуемости. Если $\Gamma \vdash \tau$ и τ содержит только α, \rightarrow , то $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \tau$. И если $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \tau$, то $\Gamma \vdash \tau$

Доказательство. Γ^* — множество формул, замкнутых по доказуемости, т.е. $\tau \in \Gamma^*$ т.и т.т.к $\Gamma^* \vdash \tau$

Доделать □

Примечание. $\vdash ? : ?$. Три задачи

1. Обитаемость типа: $\Gamma \vdash ? : \tau$

По изоморфизму К-Х и теореме(о замкнутости И.Ф. относительно доказуемости) эквивалентно $\Gamma \vdash \tau$

2. Вывод типа(реконструкция): $\Gamma \vdash A : ?$

3. Проверка типов: $\Gamma \vdash A : \tau$

Вывод типа и проверка что одно и то же

1 — полнота; 2,3 — разрешимость

Утверждение. *Выразимы только расширенные полиномы*