Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

21 сентября

Содержание

1 Просто типизированное λ-исчисление

1.1 Парадокс Карри

Попробуем построить логику на основе λ-исчисления. Введем логический символ $\supset$. Будем требовать от этого исчисления наличия следующий аксиом:

1. $\vdash A \supset A$
2. $\vdash (A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3. $\vdash A =_\beta B$, тогда $A \supset B$

А также правила вывода MP:

$$\frac{\vdash A \supset B \quad \vdash A}{\vdash B}$$

Не вводя дополнительные правила вывода и схемы аксиом, покажем, что данная логика является противоречивой. Для чего введем следующие условные обозначения:

- $F_\alpha \equiv \lambda x.(x\ x) \supset \alpha$
- $\Phi_\alpha \equiv F_\alpha\ F_\alpha \equiv (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha)$

Редуцируя Φ_α получаем

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha &=_\beta (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha)\\ &=_\beta (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha)\ (\lambda x.(x\ x) \supset \alpha) \supset \alpha\\ &=_\beta \Phi_\alpha \supset \alpha\end{aligned}$$

Теперь докажем противоречивость введенной логики. Для этого докажем, что в ней выводимо любое утверждение:

1)	$\vdash \Phi_\alpha \supset \Phi_\alpha \supset \alpha$	$\vdash \Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \supset \alpha$
2)	$\vdash (\Phi_\alpha \supset \Phi_\alpha \supset \alpha) \supset (\Phi_\alpha \supset \alpha)$	$\vdash (A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3)	$\vdash \Phi_\alpha \supset \alpha$	MP $2, 1$
4)	$\vdash (\Phi_\alpha \supset \alpha) \supset \Phi_\alpha$	$\vdash \Phi_\alpha \supset \alpha =_\beta \Phi_\alpha$
5)	$\vdash \Phi_\alpha$	MP $4, 3$
6)	$\vdash \alpha$	MP $3, 5$

Таким образом, введенная логика оказывается противоречивой

1.2 Исчисления

Определение. Типовые переменные:

- α, β, γ — атомарные
- τ, σ — составные

Тип: $\tau ::= (\tau \to \tau) \mid \alpha$
Следует:

- 2 традиции:
  1. Исчисление по Черчу
  2. Исчисление по Карри

1.3 Исчисление по Карри

Определение. Исчисление по Карри:

- $\Gamma \vdash A : \tau$ $(\Gamma \vdash A^\tau)$, где Γ — $\{x_1 : \tau_1,\ x_2 : \tau_2, \dots\}$
- правила:
  1. $$\frac{}{\Gamma, x_1 : \tau_1 \vdash x_1 : \tau_1} \quad x_1 \notin Fv(\Gamma) \quad \text{(Ax.)}$$
  2. $$\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A\ B : \tau}$$
  3. $$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \tau \to \sigma}$$

Пример.

$$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

- $x : \alpha$
- $f : \alpha \to \alpha$

Доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f : \alpha \to \alpha \vdash f : \alpha \to \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash f : \alpha \to \alpha} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \alpha}}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}}{f : \alpha \to \alpha, x : \alpha \vdash f\ f(f\ x) : \alpha}}{f : \alpha \to \alpha \vdash \lambda x.f\ (f\ x) : \alpha \to \alpha}}{\vdash \lambda f.\lambda x.\ f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha}$$

Пример.

$$\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (.x\ x)$$

Применимо только правило 2. Не имеет типа

Теорема 1.1. Если $\Gamma \vdash A : \tau$, то любое подвыражение имеет тип

Доказательство. Рассмотрим случай: если выражение типизируется, значит используется одно из правил:

1. $\Gamma \vdash A : \tau$ используется 1 правило $\frac{}{\Gamma, a:\tau \vdash a:\tau}$

Переход:
пусть любое выражение короче n символов обладает свойством. Покажем что этим свойством обладает выражение A длины
Доделать □

Теорема 1.2 (Subject reduction)**.** $\Gamma \vdash A : \sigma$ и $A \twoheadrightarrow_\beta B$
Тогда $\Gamma \vdash B : \sigma$

Доказательство. $A \to_\beta B$ случаи:

1. $\lambda x.A \to \lambda x.B$
2. $A\ B \to A'\ B'$
3. $(\lambda x.A)\ B \to A[x := B]$

$\square$

Теорема 1.3. Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и:

- существуют N, P :

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \quad \Gamma \vdash N : \sigma$$

$$M \twoheadrightarrow_\beta P \quad \Gamma \vdash P : \sigma$$

Тогда найдется такой S, что $\Gamma \vdash S : \sigma$ и $N \twoheadrightarrow_\beta S$ и $P \twoheadrightarrow_\beta S$

1.4 Исчисление по черчу

Определение. Исчисление по Чёрчу: $\Gamma \vdash_{\text{Ч}} A : \tau$
Язык:

- x — переменная
- $A\ B$ — аппликация
- $\lambda x^\tau.P$ — абстракция

Теорема 1.4. Если конекст Γ и выражение P типизируется, то $\Gamma \vdash_{\text{Ч}} P : \sigma$

Пример.

$$\vdash_C \lambda x.x : {}^{\alpha\to\alpha}_{\beta\to\beta}$$

$$\vdash_{\text{Ч}} \lambda x.x : \sigma \to \sigma$$

Пример.

$$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : {}^{(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha)}_{(\beta\to\beta)\to(\beta\to\beta)}$$

$$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x.^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$$