Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

21 сентября

Содержание

Определение. Пред λ-терм:

1. x — переменная
2. $L\ L$ — аппликация
3. $\lambda x.L$ — абстракция

Примечание.

1. $\lambda a.a$
2. $\lambda b.b$

Хотим чтоб не отличались

Определение. α-эквивалентность. $A =_\alpha B$

1. $A \equiv x,\ B \equiv x$ — одна и та же переменная
2. $A \equiv P\ Q,\ B \equiv R\ S \quad P =_\alpha R,\ Q =_\alpha S$
3. $A \equiv \lambda x.P,\ B \equiv \lambda y.Q$. Существует t — новая переменная, что $P[x \coloneqq t] =_\alpha Q[y \coloneqq t]$

Определение.

- свободные вхождения
- свобода для подстановки
  $A[x \coloneqq B]$. Никакое свободное вхождение переменных в B, не станет связным после подстановки
- замена свободных вхождений $A[x \coloneqq B]$

Пример. Парадокс

1. $\Phi_A \supset \Phi_A$
2. $\Phi_A \supset (\Phi_A \supset A)$
3. $\Phi_A \supset (\Phi_A \supset A) \supset (\Phi_A \supset A)$
4. $\Phi_A \supset A$
5. $(\Phi_A \supset A) \supset \Phi_A$
6. Φ_A

Определение. Типовые переменные:

- α, β, γ — атомарные
- τ, σ — составные

Тип: $\tau ::= (\tau \to \tau) \mid \alpha$
Следует:

- 2 традиции:
  1. Исчисление по Черчу

2. Исчисление по Карри

Определение.

- $\Gamma \vdash A : \tau$ (ΓA^{τ}), где Γ — $\{x_1 : \tau_1,\ x_2 : \tau_2, \dots\}$
- правила:

  1. $$\frac{}{\Gamma, x_1 : \tau_1 \vdash x_1 : \tau_1} \quad x_1 \notin Fv(\Gamma) \quad (\text{Ax.})$$

  2. $$\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A\ B : \tau}$$

  3. $$\frac{\Gamma, x : \tau A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \tau \to \sigma}$$

Пример. Комбинатор I (Identity). Доказательство того, что $(\to_\beta)$ не обладает ромбовидным свойством:

$$I = \lambda x.x$$

$$\begin{tikzcd}
& (I\ I)\ (I\ I) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I\ (I\ I) \arrow[d] & & (I\ I)\ I \arrow[d] \\
I\ I \arrow[dr] & & I\ I \arrow[dl] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Примечание.

$$I = \lambda x.x \quad K = \lambda x.\lambda y.x \quad \Omega = \omega\ \omega \quad \omega = \lambda x.x\ x$$

$$\begin{tikzcd}
K I \Omega \arrow[d] \\
((\lambda x.\lambda y.x)\ I)\ \Omega \arrow[d] \arrow[loop right] \\
(\lambda y.I)\ \Omega \arrow[d] \\
I
\end{tikzcd}$$

Пример.

$$\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (.x\ x)$$

Применимо только правило 2. Не имеет типа

Определение. Будем говорить что отношение R обладает **ромбовидным** свойством, если для любых a, b, c

1. $aRb,\ aRc$
2. $b \neq c$

Существует d: $bRd,\ cRd$

Примечание. Не выполняется на натуральных числах

Определение. **β-редуциремость** $(\twoheadrightarrow_\beta)$ — рефлексивное, транзитивное замыкание $(\to_\beta)$

Теорема 0.1 (Черча-Россера)**.** Если $\Gamma \vdash A : \tau$, то любое подвыражение имеет тип

Определение. **Параллельная β-редукция** $(\rightrightarrows_\beta)$ это $(\to_\beta)$+правило:

0. $A =_\alpha B$

1. $A \equiv P\ Q,\ B \equiv R\ S$ и $P \rightrightarrows_\beta R$ и $Q \rightrightarrows_\beta S$

2,3. аналогично $(\to_\beta)$

Лемма 1. $(\rightrightarrows_\beta)$ — *обладает ромбовидными свойством*

Лемма 2. *Если R — обладает ромбовидным свойством, то R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание) — обладает ромбовидным свойством*

Лемма 3. $(\rightrightarrows_\beta) \subseteq (\twoheadrightarrow_\beta)$

Доказательство Теоремы. Рассмотрим случай: если выражение типизируется, значит используется одно из правил:

1. $\Gamma \vdash A : \tau$ используется 1 правило $\frac{}{\Gamma, a:\tau \vdash a:\tau}$

Переход:
пусть любое выражение короче n символов обладает свойством. Покажем что этим свойством обладает выражение A длины

Доделать □

Теорема 0.2 (Subject reduction)**.** $\Gamma \vdash A : \sigma$ и $A \twoheadrightarrow_\beta B$
Тогда $\Gamma \vdash B : \sigma$

Доказательство. $A \to_\beta B$ случаи:

1. $\lambda x.A \to \lambda x.B$
2. $A\ B \to A'\ B'$
3. $(\lambda x.A)\ B \to A[x := B]$

□

Определение. Нормальный порядок редукции — редукция самого левого β-редекса

Определение. Аппликативный порядок редукции — редукция самого левого β-редекса из самых вложенных

Теорема 0.3. Если конекст Γ и выражение P типизируется, то $\Gamma \vdash_4 P : \sigma$

Пример.

$$\vdash_C \lambda x.x : \alpha \to \alpha(\beta \to \beta)$$

$$\vdash_4 \lambda x.x : \sigma \to \sigma$$

Пример.

$$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : \substack{(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha) \\ (\beta\to\beta)\to(\beta\to\beta)}$$

$$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x.^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$$