

# Лекция 3

Луя Yaroshevskiy

21 сентября

## Содержание

**Определение. Пред  $\lambda$ -терм:**

1.  $x$  — переменная
2.  $L L$  — аппликация
3.  $\lambda x.L$  — абстракция

*Примечание.*

1.  $\lambda a.a$
2.  $\lambda b.b$

Хотим чтоб не отличались

**Определение.  $\alpha$ -эквивалентность.  $A =_\alpha B$**

1.  $A \equiv x, B \equiv x$  — одна и та же переменная
2.  $A \equiv P Q, B \equiv R S \quad P =_\alpha R, Q =_\alpha S$
3.  $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$ . Существует  $t$  — новая переменная, что  $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$

**Определение.**

- свободные вхождения
- свобода для подстановки  
 $A[x := B]$ . Никакое свободное вхождение переменных в  $B$ , не станет связным после подстановки
- замена свободных вхождений  $A[x := B]$

*Пример. Парадокс*

1.  $\Phi_A \supset \Phi_A$
2.  $\Phi_A \supset (\Phi_A \supset A)$
3.  $\Phi_A \supset (\Phi_A \supset A) \supset (\Phi_A \supset A)$
4.  $\Phi_A \supset A$
5.  $(\Phi_A \supset A) \supset \Phi_A$
6.  $\Phi_A$

**Определение. Типовые переменные:**

- $\alpha, \beta, \gamma$  — атомарные
- $\tau, \sigma$  — составные

**Тип:**  $\tau ::= (\tau \rightarrow \tau) \mid \alpha$

Следует:

- 2 традиции:
  1. Исчисление по Черчу

## 2. Исчисление по Карри

**Определение.**

- $\Gamma \vdash A : \tau$  ( $\Gamma A \tau$ ), где  $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \dots\}$
- правила:

1.

$$\frac{}{\Gamma, x_1 : \tau_1 \vdash x_1 : \tau_1} \quad x_1 \notin Fv(\Gamma) \quad (\text{Ax.})$$

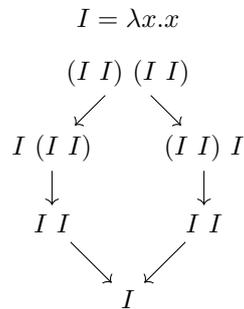
2.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash AB : \tau}$$

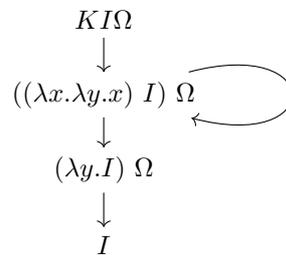
3.

$$\frac{\Gamma, x : \tau A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \tau \rightarrow \sigma}$$

*Пример.* Комбинатор  $I$  (Identity). Доказательство того, что  $(\rightarrow_\beta)$  не обладает ромбовидным свойством:

*Примечание.*

$$I = \lambda x. x \quad K = \lambda x. \lambda y. x \quad \Omega = \omega \omega \quad \omega = \lambda x. x x$$

*Пример.*

$$\Omega = (\lambda x. x x) (.x x)$$

Применимо только правило 2. Не имеет типа

**Определение.** Будем говорить что отношение  $R$  обладает **ромбовидным** свойством, если для любых  $a, b, c$

1.  $aRb, aRc$
2.  $b \neq c$

Существует  $d: bRd, cRd$ *Примечание.* Не выполняется на натуральных числах

**Определение.**  $\beta$ -редуцируемость  $(\rightarrow_\beta)$  — рефлексивное, транзитивное замыкание  $(\rightarrow_\beta)$

**Теорема 0.1** (Черча-Россера). Если  $\Gamma \vdash A : \tau$ , то любое подвыражение имеет тип

**Определение.** Параллельная  $\beta$ -редукция  $(\rightrightarrows_\beta)$  это  $(\rightarrow_\beta)$ +правило:

$$0. A =_\alpha B$$

1.  $A \equiv P Q, B \equiv R S$  и  $P \Rightarrow_{\beta} R$  и  $Q \Rightarrow_{\beta} S$

2,3. аналогично  $(\rightarrow_{\beta})$

**Лемма 1.**  $(\Rightarrow_{\beta})$  — обладает ромбовидными свойством

**Лемма 2.** Если  $R$  — обладает ромбовидным свойством, то  $R^*$  (транзитивное, рефлексивное замыкание) — обладает ромбовидным свойством

**Лемма 3.**  $(\Rightarrow_{\beta}) \subseteq (\rightarrow_{\beta})$

*Доказательство Теоремы.* Рассмотрим случай: если выражение типизируется, значит используется одно из правил:

1.  $\Gamma \vdash A : \tau$  используется 1 правило  $\frac{\Gamma, a : \tau \vdash a : \tau}{\Gamma \vdash a : \tau}$

Переход:

пусть любое выражение короче  $n$  символов обладает свойством. Покажем что этим свойством обладает выражение  $A$  длины

Доделать

□

**Теорема 0.2** (Subject reduction).  $\Gamma \vdash A : \sigma$  и  $A \rightarrow_{\beta} B$

Тогда  $\Gamma \vdash B : \sigma$

*Доказательство.*  $A \rightarrow_{\beta} B$  случаи:

1.  $\lambda x.A \rightarrow \lambda x.B$

2.  $A B \rightarrow A' B'$

3.  $(\lambda x.A) B \rightarrow A[x := B]$

□

**Определение. Нормальный порядок редукции** — редукция самого левого  $\beta$ -редекса

**Определение. Аппликативный порядок редукции** — редукция самого левого  $\beta$ -редекса из самых вложенных

**Теорема 0.3.** Если контекст  $\Gamma$  и выражение  $P$  типизируется, то  $\Gamma \vdash_4 P : \sigma$

*Пример.*

$$\vdash_C \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha(\beta \rightarrow \beta)$$

$$\vdash_4 \lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma$$

*Пример.*

$$\lambda f.\lambda x.f (f x) : \frac{(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{(\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)}$$

$$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}.\lambda x.^{\alpha}.f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$