

Лекция 14

Луа Yaroshevskiy

14 декабря

Содержание

| | | |
|----------|----------------------|----------|
| 1 | Линейные типы | 1 |
| 1.1 | Линейная логика | 2 |
| 1.2 | Уникальные типы | 2 |

1 Линейные типы

Определение. Структурные правила:

- Обмен
$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A}{\Delta, \Gamma \vdash A}$$
- Сжатие
$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$
- Ослабление
$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Примечание. Вспомним комбинаторы:

- $B = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ y$
- $C = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ (y \ z)$
- $K = \lambda x. \lambda y. x$
- $W = \lambda x. \lambda y. x \ y \ y$

Ослабление:

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad (\text{Схема 1}) \\ \beta \rightarrow \alpha \quad (\text{М.Р.}) \end{array}$$

Заметим что:

- Обмен — B
- Сжатие — W
- Ослабление — K

Хотим построить теорию без сжатия и ослабления:

- B, C — линейная
- B, C, K — аффинная

Определение. Правила для конъюнкции

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \times B \quad \Delta, A, B \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}$$

Пример.

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A} \quad \frac{A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \quad A \vdash A}{A \rightarrow B, A \vdash B}}{A, A \rightarrow B, A \vdash A \times B}}{A \rightarrow B, A, A \vdash A \times B}}{A \rightarrow B, A \vdash A \times B}$$

Примечание. Классические правила

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \times B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \times B}{\Gamma \vdash B}$$

1.1 Линейная логика

Определение. Линейная логика Связки:

$$\alpha := x \mid \alpha \multimap \beta \mid \alpha \otimes \beta \mid \alpha \oplus \beta \mid !\alpha$$

Контексты:

$$\frac{}{\langle A \rangle \vdash \dots} \quad \frac{}{\langle B \rangle \vdash \dots}$$

линейные обычные

Определение.

$$\frac{\Gamma, \langle A \rangle \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \quad \frac{\Gamma \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \quad \frac{\Gamma \vdash A \otimes B \quad \Delta, \langle A \rangle, \langle B \rangle \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, [A], [A] \vdash B}{\Gamma, [A] \vdash B} \quad \frac{}{\langle A \rangle \vdash A} \quad \frac{}{[A] \vdash A}$$

$$\frac{[\Gamma] \vdash A}{[\Gamma] \vdash !A} \quad \frac{\Gamma \vdash !A \quad \Delta, [A] \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Соответствие с ИИВ

$$\begin{array}{lll} A \rightarrow B & !A \multimap B & \\ A \times B & A \& B & !A \otimes B \\ A + B & !A \oplus B & \end{array}$$

1.2 Уникальные типы

Примечание. Универсумы:

- \mathcal{T} — базовых типов (`int`, `bool` и т.п.)
- U — уникальность
 - \cdot, \times — уникальный, не уникальный
 - \wedge, \vee, \neg на U
- $Attr : \mathcal{T} - > U - > *$

Определение. λ -исчисление

$$e := x^\odot \mid x^\otimes \mid \lambda x.e \mid e e \mid \tau_k \mid C_k \mid \tau_{(k' \rightarrow k)} \tau_{k'}$$

Пример.

$$\begin{aligned} dup &:: (t^\times \rightarrow (t^\times, t^\times))^u \\ dup \ x &= (x^\otimes, x^\otimes) \end{aligned}$$

Определение. • Введение переменных

$$\frac{}{\Gamma, x : t^u \vdash x^\odot : t^u |_{x:u}} \text{Var}^\odot$$

$$\frac{}{\Gamma, x : t^\times \vdash x^\otimes : t^\times |_{x:\times}} \text{Var}^\otimes$$

• Абстракция

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash e : b |_{fv} \quad fv' = ?_x fv}{\Gamma \vdash \lambda x.e : a \xrightarrow{\vee fv'} b |_{fv'}}$$

• Апликация

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : a \xrightarrow{u} b |_{fv_1} \quad \Gamma \vdash e_2 : a |_{fv_2}}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : b |_{fv_1 \cup fv_2}}$$