Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

7 декабря

Содержание

1 Теорема Диаконеску

Теорема 1.1. ИИП + ZF + Аксиома выбора $\implies$ Исключенное третье

Рассмотрим P. $B = \{0, 1\}$

$$U = \{x \in B | x = 0 \vee P\}$$
$$V = \{x \in B | x = 1 \vee P\}$$

Можем заметить что и U и V непустые

Определение. Аксиома выбора. S — семейство непустых множеств, то есть $f : S \to \bigcup S$, что $f(x) \in x$. В частности, есть $f : \{u, v\} \to B$, что $f(v) \in u$ и $f(v) \in V$

Примечание. $f(u) \stackrel{?}{=} f(v)$

да

$$f(u) = 0 \implies f(v) = 0 \implies p$$
$$f(U) = 1 \implies p$$

нет

$$f(u) \neq f(v)$$
$$u \neq v \to \neg p$$

Пусть p истно, тогда $u = v$, но $u \neq v$

1.1 Аксиома выбора (попытка 1)

Определение.

- `A B : \Set`, `A` — индексы (S), `B` — множества ($\bigcup S$)
- `Q : A -> B -> \Prop` — отношение быть подмножеством: `Q a b` — b принадлжеит a

```
\func Choice (A B : \Set)
             (Q : A -> B -> \Prop)
             (not_empty : \Pi (x : A) -> \Sigma (y : B) (Q x y)) :
  \Sigma (f : \Pi (x : A) -> B) (\Pi (x : a) -> Q x (f x)) =>
    (\lam (x : A) => not_empty x.1, \lam (x : A) => not_empty x.2)
```

Произошла перестановка кванторов

Определение. Сетоид — $S/_{\approx}$, $\approx$ — отношение эквивалентности

```
<S, E, E-trans, E-refl, E-sym>
E : S -> S -> \Prop
```

Здесь E — соответсвующее отношение равенства

Проблема: `not_empty` слишком сильный

1.2 `Logic.Classical`

1. Переформулируем аксиому выбора

   - `A : \Set`
   - `B : \Set`
   - $\underbrace{\Pi x : A.|Bx|}_{p} \to |\Pi x A.Bx|$

   Пусть $y : A$ и $p\ y = \text{Empty}$

   - Т.е. Bx не пусто для всех $x : A$
   - Это чистое существование

2. LEM

```
\lem (p : \Prop) : Dec p =>
  \case (f (in~ true)).1 \as x,
        (f (in~ false)).1 \as y \with {
    true, true => {?} -- yes
    false, false => {?} -- yes
    true, false => {?} -- no
    false, true => {?} -- no
  }
```