Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

30 ноября

Содержание

1 Парадокс Жирара

λ-куб не такой выразительный как хотелось бы
Примечание. Топология: $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$

- $\mathcal{P}(X)$ — множество всех функций типа `X -> *`
- $x \in \mathcal{P}(X)$, `x : X -> *`

Топология: `(X -> *) -> *` — про подмножество говорим, подходит ли оно
Примечание.

0:	Все значения (λ-терм)	
1:	Типы (утверждения)	$*$
2:	Рода	$* \to *$
3:	Сорта	$\square$
4:		$\triangle$

1.1 Обобщение λ-куба

Примечание. λHOL:

- $*, \square, \triangle$
- Правила: $(*, *), (\square, \square), (\square, *)$.

Если добавим $(\triangle, *)$, все останется хорошо. Там живет: $\Pi x^{\square}$.значения. Если добавим $(\triangle, \square)$, получим неконсистентность.

$$\overbrace{\underbrace{(*, *)\ (\square, \square)\ (\square, *)\ (\triangle, \square)}_{\textbf{Система } U^-}\ (\triangle, *)}^{\textbf{Система } U}$$

И U и U^- неконсистентны.
Примечание. $\mathcal{P}(X)$ — тип всех функций $X \to *$, тогда топология:

$$\underbrace{\underbrace{X \to *}_{\square} \to *}_{\square}$$

Заметим, что это на самом деле квантор всеобщности:

$$\forall \alpha^{\tau}.\varphi(\alpha) = A(\underset{*}{\tau}, \underset{\square}{\varphi})^{\square}$$

$$S\ :\ A(\tau) \approx \overbrace{(\tau \to *)}^{\varphi} \to *$$

φ — обобщенная функция отображающая значения типа в утверждение, квантор всеобщности — штука, которая отображает такую фукнцию в утверждение: истина эта функция или ложна.
Примечание. В системе U можем написать что-то вроде Y-комбинатора — $F \equiv \lambda$-выражение, которое не заканчивается, но $\vdash F : \varphi$, φ - любой. Значит любой тип обитаем

2 Парадок Бурали-Форте

1.

   Утверждение. *Не существует максиамльного ординала (множества всех ординалов)*

   Определение. Ординал — транзитивное, вполне упорядоченное множество

   S — множество всех ординалов, Тогда оно $\in S$?

2. Фундированное множество X — множество, где нет бесконечной цепочки $\in$

$$\underbrace{X \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n}_{\text{конечное } n}$$

   Множество всех фундированных множеств — фундированное

3. Множество всех множеств

$$\sigma : X \to \mathcal{P}X$$

$$\tau : \mathcal{P}X \to X$$

   - σX — $\{a|a \in X\}$ — начальный отрезок до X
   - τX — ординал, соответствующий X

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma\alpha|\alpha \in X\}$$

$$\sigma\tau X = \{\beta|\beta < \tau X\} = \{\beta|\beta = \tau\sigma\alpha \text{ для } \alpha \in Z\}$$

Определение. Парадоксальный универсум

- $\sigma : U \to \mathcal{P}U$
- $\tau : \mathcal{P}U \to U$

Если для всех $X \in \mathcal{P}U$

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma x|x \in X\}$$

Определение. $y \in \sigma x$, то $y < x$

Примечание. $\tau\sigma y < \tau\sigma x$

X — **индуктивен**, если каждый $x : y < x$, то $y \in X$, тогда $x \in X$

Примечание. Трансфинитная индукция — если утверждение истнинно для всех ординалов меньше $x \implies$ истинно для ординалов x, то оно истинно везде

X — фундировано, если x принадлежит всем индуктивным множествам

Определение. $\Omega = \tau\{x|x \text{ — фундировано}\}$

Утверждение. *Ω — фундировано*

Утверждение. *Ω — не фундировано*

Примечание. Как это выразить в U?

- $\mathcal{P}X$ `: X -> *`
- $U : \square$
- $\sigma : U \to \mathcal{P}U$
- $\tau : \mathcal{P}U \to U$
- $o : \forall S^{\mathcal{P}U}.\sigma(\tau(x)) = \lambda u^U.\exists x^U.(Sx)\&u = \tau(\sigma(x))$