Лекция 2

Ilya Yaroshevskiy

14 сентября

Содержание

1 Про Y-комбинатор **3**

Определение.

- $\lambda x.A$ — абстракция
- $A\ B$ — применение (аппликация)
- x — переменная (атом)

Примечание.

1. $\lambda a.a$
2. $\lambda b.b$

Хотим чтоб не отличались

Определение. *α-эквивалентность. $A =_\alpha B$

1. $A \equiv x,\ B \equiv x$ — одна и та же переменная
2. $A \equiv P\ Q,\ B \equiv R\ S \quad P =_\alpha R,\ Q =_\alpha S$
3. $A \equiv \lambda x.P,\ B \equiv \lambda y.Q$. Существует t — новая переменная, что $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$

Определение.

- свободные вхождения
- свобода для подстановки
  $A[x := B]$. Никакое свободное вхождение переменных в B, не станет связным после подстановки
- замена свободных вхождений $A[x := B]$

Определение. **λ-трем**. $\Lambda/_{=_\alpha}$ — множество λ-термов

Определение. **β-редекс**. Выражение вида $(\lambda x.A)\ B$

Определение. Выражения A и B находятся в отношении **β-редукции**: $A \to_\beta B$, если

1. $A \equiv P\ Q,\ B \equiv R\ S$ и одно из
   - $P \to_\beta R$ и $Q =_\alpha S$
   - $P =_\alpha R$ и $Q \to_\beta S$
2. $A \equiv \lambda x.P,\ B \equiv \lambda x.Q$ и $P \to_\beta Q$
3. $A \equiv (\lambda x.P)\ Q,\ B \equiv P[x := Q]$
   Q свободно для подстановки. Ценой переименования связных переменных можно подставить любое выражение.

Пример. Комбинатор I (Identity)

$$I = \lambda x.x$$

$$(I\ I)\ (I\ I)$$

Доделать

Пример.

- $I = \lambda x.x$
- $K = \lambda x.\lambda y.x$ — Константа
- $\Omega = \omega\ \omega$, где $\omega = \lambda x.x\ x$

$$\begin{aligned} k\ I\ \Omega &= \\ ((\lambda x.\lambda y.x)\ I)\ \Omega &\to_\beta \\ (\lambda y.I)\ \Omega &\to_\beta I \end{aligned}$$

Определение. Будем говорить что отношение R обладает **ромбовидным** свойством, если для любых a, b, c

1. $aRb,\ aRc$
2. $b \neq c$

Существует d: $bRd,\ cRd$

Примечание. Не выполняется на натуральных числах

Определение. **β-редуциремость** $(\twoheadrightarrow_\beta)$ — рефлексивное, транзитивное замыкание $(\to_\beta)$

Теорема 0.1 (Черча-Россера). β-редуцируемость обладает ромбовидным свойством

Определение. **Параллельная β-редукция** $(\rightrightarrows_\beta)$ это $(\to_\beta)$+правило:

0. $A =_\alpha B$

1. $A \equiv P\ Q,\ \ B \equiv R\ S$ и $P \rightrightarrows_\beta R$ и $Q \rightrightarrows_\beta S$

2,3. аналогично $(\to_\beta)$

Лемма 1. $(\rightrightarrows_\beta)$ *— обладает ромбовидными свойством*

Лемма 2. *Если R — обладает ромбовидным свойством, то R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание) — обладает ромбовидным свойством*

Лемма 3. $(\rightrightarrows_\beta) \subseteq (\twoheadrightarrow_\beta)$

Доказательство Теоремы.

1. $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\twoheadrightarrow_\beta)$ — из леммы
2. $(\twoheadrightarrow_\beta) \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$
3. Раз $(\rightrightarrows_\beta)^*$ обладает ромбовидным свойством, то и $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством

□

Следствие 0.1.1. У λ-выражения существует не более 1 нормальной формы

Доказательство. Пусть A имеет две нормальные формы:

- $A \twoheadrightarrow_\beta B$
- $A \twoheadrightarrow_\beta C$

и $B \neq_\beta C$. Тогда есть D: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Противоречие □

Определение. Нормальный порядок редукции — редуцируем самый левый редекс

Теорема 0.2. Если нормальная форма существует, она может быть получена нормальным порядком редукции.

Пример. Перепишем `if (a > b) then X else Y` в λ-выражение:

$$(((a > b)\ X)\ Y)$$

$$\begin{aligned} (((T)\ X)\ Y) &\to_\beta \\ (\lambda b.X)\ Y &\to_\beta \\ X& \end{aligned}$$

Это ленивое вычисление

1 Про Y-комбинатор

$$Y\ f =_\beta f\ (Y\ f) =_\beta f\ (f\ (Y\ f)) =_\beta \cdots =_\beta f^{(n)}\ (Y\ f)$$

$$Y\ \overbrace{(\lambda f.\lambda x.x)}^{\varphi} =_\beta \varphi\ (Y\ \varphi)$$

Задача 1. Дз 8.g

Решение.

$$(Y \lambda f.\lambda a.\lambda b.\lambda n.(IsZero\ n)a(f\ b\ (a+b)\ (n-1)))\ 1\ 1$$

```
fib a b n =
  if n = 0 then a
  else fib b (a + b) (n - 1)
```