Практики по Математической Статистике 5 семестр

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Оглавление

Практика 2

X_i	X_1	X_2	$\dots$	X_n
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_n

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i m_i$$

$$D_c = 1n\sum_{i-1}^{k}(X_i - \overline{X})m_i$$

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i^k m_i$$

1.1 Точные зарактеристика по исходным данным `Excel`

- $\overline{X} =$ `AVERAGE`

1.2 Метод моментов

Задача 1. Из теории известно что случайная величина имеет показательное распределение. По стат. данным нашли $\overline{X} = 2.54$. Найти функцию распределения, будет ли эта оценка смещенной, если да то в какую сторону.

Решение.

$$E\mathbb{X} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{\overline{X}}$$

$\overline{X}$ — несмещенная оценка, т.е. $E\overline{X} = E\mathbb{X}$

$$E\alpha^* = E1\overline{X} \geq 1E\overline{X} = \frac{1}{EX} = \alpha$$

Задача 2. Случайная величина имеет $\Gamma_{\alpha,\lambda}$. $\overline{X} = 5.4$, $\overline{X^2} = 32.25$. Найти оценки параметров α, λ.

$$\begin{cases} E\mathbb{X} = \frac{\lambda}{\alpha} \\ D\mathbb{X} = \frac{\lambda}{\alpha^2} \end{cases}$$

$$\alpha^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \frac{5.4}{32.25 - 5.4^2} \approx 1.7476$$

$$\lambda^* = \overline{X} \cdot \alpha^* = 5.4 * 1.7476 = 9.4369$$

Практика 3

Задача 3. Известно что случайная величина имеет распределение Бернулли($\mathbb{X} \in B_p$). Найти оценка параметра p методом максимального правдоподобия.

Решение.

$$L(\vec{X}, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{n-n\overline{X}} \cdot p^{n\overline{X}}$$

$$\ln L(\vec{X}, \Theta) = (n - n\overline{X}) \cdot \ln(1-p) + n\overline{X} \cdot \ln p =$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}, \Theta)}{\partial p} = \frac{n - n\overline{X}}{1-p} + \frac{n}{p} = 0 \implies$$

$$\implies p = \overline{X}$$

Задача 4. $\mathbb{X} \in E_\alpha$

1. E_α — регулярное семейство
2. Найти $I(\alpha)$

Решение.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \end{cases}$$

Носитель $C = (0; \infty)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \alpha - \alpha x) = \frac{1}{\alpha} - x$$

— непрерывно при $\forall \alpha$

$$I(\alpha) = E(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(X))^2 = E(\frac{1}{\alpha} - X)^2 = E(X - EX)^2 = DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

— информация Фишера

Примечание.

$$\frac{1}{n \pm \alpha} = \frac{\alpha^2}{n}$$

Примечание. Можем взять вместо параметра α параметр $\frac{1}{\alpha}$. Тогда оценка будет несмещенной.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

Носитель $C = (0; \infty)$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$$

— непрерывно при $\forall\alpha$

$$I(\alpha) = E(\frac{X}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha})^2 = \frac{1}{\alpha^4} E(X-\alpha)^2 = \frac{1}{\alpha^4} E(X - EX)^2 = \frac{1}{\alpha^4} DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^* = \overline{X} \quad D\alpha^* = D\overline{X} = \alpha^2 n$$

$\alpha^* = \overline{X}$ — эффективная оценка

Задача 5. $\mathbb{X} \in U(0, \Theta)$

$$\Theta = 2\overline{X} \quad \tilde{\Theta} = \frac{n+1}{n}\overline{X}$$

Решение. $C = (0; \infty)$

$$I(\Theta) = E(\frac{\partial}{\partial\Theta} \ln f_\Theta(X)) = E(-\frac{1}{\Theta})^2 = \frac{1}{\Theta^2}$$

$$D\Theta^* = \Theta^2 3n \quad D\tilde{\Theta} = \frac{\Theta^2}{n(n+2)}$$

Нарушено неравенство Раво-Крамера, т.к семейство не регулярное

Практика 11

Доделать

Метод наиме ныших квадратов получили систему уравнений:

$$A\vec{b} = Z\vec{X}$$

Решим систему:

$$\begin{pmatrix} an + bn\overline{z} \\ an\overline{z} + bn\overline{z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\overline{x} \\ n\overline{xz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} an + bn\overline{z} = n\overline{x} \\ an\overline{z} + bn\overline{z^2} = n\overline{xz} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\overline{z} = \overline{x} \\ a\overline{z} + b\overline{z^2} = \overline{xz} \end{cases}$$

$$n^2 \det A = \overline{z^2} - \overline{z}^2 = D(z)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{nDz} \begin{pmatrix} \overline{z^2} & -\overline{z} \\ -\overline{z} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(b_i) = \sigma^2 (A^{-1})_{1i}$$

$$D(a) = \sigma^2 (A^{-1})_{11} = \frac{\sigma^2 \overline{z^2}}{nD(z)} \to 0$$

$$D(b) = \sigma^2 (A^{-1})_{22} = \frac{\sigma^2}{nD(z)} \to 0$$

Практика 13

- X_n — рекурентное соотношение

$$X_n + a_{n-1}X_{n-1} + \dots + a_0X_0 = 0$$

4.1 Алгоритм

Каждому корню характерисчтиеского урравнения сопоставляем несколько решений по жтому принципц. Общее решение является линейной комбинацией этих решений.

Пример. Уравнение второго порядка

$$x_2 + bx_1 + cx_0 = 0$$

1. $D > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два вещественных корня

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

2. $D = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$x_n = C_1\lambda_{n_{+C_n n\lambda^n}}$$

3. $D < 0$, $\lambda_{1,2} = 2$ $\boxed{\text{Доделать}}$