

Практика 3

Цыа Yaroshevskiy

22 сентября

Содержание

Задача 1. Известно что случайная величина имеет распределение Бернулли ($X \in B_p$). Найти оценка параметра p методом максимального правдоподобия.

Решение.

$$L(\vec{X}, \Theta) = \prod_{i=1}^n (1-p)^{n-n\bar{X}} \cdot p^{n\bar{X}}$$
$$\ln L(\vec{X}, \Theta) = (n - n\bar{X}) \cdot \ln(1-p) + n\bar{X} \cdot \ln p =$$
$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}, \Theta)}{\partial p} = \frac{n - n\bar{X}}{1-p} + \frac{n}{p} = 0 \implies$$
$$\implies p = \bar{X}$$

Задача 2. $X \in E_\alpha$

1. E_α — регулярное семейство

2. Найти $I(\alpha)$

Решение.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \end{cases}$$

Носитель $C = (0; \infty)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \alpha - \alpha x) = \frac{1}{\alpha} - x$$

— непрерывно при $\forall \alpha$

$$I(\alpha) = E\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(X)\right)^2 = E\left(\frac{1}{\alpha} - X\right)^2 = E(X - EX)^2 = DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

— информация Фишера

Примечание.

$$\frac{1}{n \pm \alpha} = \frac{\alpha^2}{n}$$

Примечание. Можем взять вместо параметра α параметр $\frac{1}{\alpha}$. Тогда оценка будет несмещенной.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

Носитель $C = (0; \infty)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$$

— непрерывно при $\forall \alpha$

$$I(\alpha) = E\left(\frac{X}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^4} E(X - \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha^4} E(X - EX)^2 = \frac{1}{\alpha^4} DX = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^* = \bar{X} \quad D\alpha^* = D\bar{X} = \alpha^2 n$$

$\alpha^* = \bar{X}$ — эффективная оценка

Задача 3. $X \in U(0, \Theta)$

$$\Theta = 2\bar{X} \quad \tilde{\Theta} = \frac{n+1}{n}\bar{X}$$

Решение. $C = (0; \infty)$

$$I(\Theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln f_{\Theta}(X)\right) = E\left(-\frac{1}{\Theta}\right)^2 = \frac{1}{\Theta^2}$$

$$D\Theta^* = \Theta^2 3n \quad D\tilde{\Theta} = \frac{\Theta^2}{n(n+2)}$$

Нарушено неравенство Раво-Крамера, т.к семейство не регулярное