Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

20 сентября

Содержание

1 Метод масимального правдоподобия

Состоит в том, чтобы подобрать параметр таким образом, чтобы вероятность получения данной выборки была наибольшая. Если распределение дискретное, то вероятность выборки

$$P_\theta(\mathbb{X}_1 = x_1, \mathbb{X}_2 = x_2, \dots, \mathbb{X}_n = x_n) = P_\theta(\mathbb{X}_1 = x_1)P_\theta(\mathbb{X}_2 = x_2)\dots P_\theta(\mathbb{X}_n = x_n)$$

Определение. Функцией правдоподобия $L(\overline{X}, \theta)$ называется функция

$$P_\theta(\mathbb{X}_1 = x_1)\dots P_\theta(\mathbb{X}_n = x_n) \text{ — в случае дискретного распределения}$$

$$f_\theta(x_1)\dots f_\theta(x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_n) \text{ — в сулчае абсолютно непрерывного распределения}$$

Определение. Логарифмической функцией правдоподобия $M(\overline{X})$ называется функция

$$\ln L(\overline{X})$$

Примечание. Так как логарифм – возрастающая функция, то экстремумы этих функций совпадают.

Определение. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\Theta}$ называется значение Θ при котором функция правдоподобия достигает наибольшего значения при фиксированных значениях выборки x_i

Пример. Пусть $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ — выборка неизвестного распределения Пуассона с параметром λ.

$$P(\mathbb{X} = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$L(\overline{X}) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$\frac{n \cdot \overline{X}}{\lambda} - n = 0 \implies \lambda = \overline{X}$$

$$\hat{\Theta} = \overline{X}$$

Пример. $f_{a,\sigma^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$

$$a = \overline{X} \quad \sigma^2 = D_c$$

Пример. Пусть $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ — выборка равномерного распределения вида. $X \in U(0, \Theta)$, $\Theta > 0$. Найти оценки Θ методами моментов и максимального правдоподобия и сравнить их.

$$EX = \frac{a+b}{2} = \frac{\Theta}{2} \implies \hat{\Theta} = 2\overline{X}$$

$$f_\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\Theta} & 0 \le x \le \Theta \\ 0 & x > \Theta \end{cases}$$

$$L(\overline{X}, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \Theta < \max(x_i) = \mathbb{X}_m \\ \frac{1}{\Theta^n} & \text{иначе} \end{cases}$$

Ясно, что функция $L(\overline{X}, \Theta)$ достигает наибольшего значения при $\Theta = \mathbb{X}_m$

Доделать

Примечание. ОМП часто эффективны, но могут быть смещенные.

2 Неравенство Раво-Крамера

Пусть известно что случайная величина $\mathbb{X} \in F_\Theta$ — семейство распределений с параметром Θ

Определение. **Носителем** семейства распределений F_Θ называется множество $C \in \mathbb{R}$ такое что $\forall \Theta :\ P(\mathbb{X} \in C) = 1$

Обозначение.

$$f_\Theta(x) = \begin{cases} f_\Theta(x) & \text{плотность, если распределение абсолютно непрерывное} \\ P_\Theta(\mathbb{X} = x) & \text{если распределние дискретное} \end{cases}$$

Определение. **Информацией Фишера** называется величина

$$I(\Theta) = E(\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln f_\Theta(x))^2$$

при условии если она существует.

Определение. Семейство распределений F_Θ называется **регулярным**, если:

1. Существует носитель C семейства F_Θ такой, что $\forall x \in C$ функция $\ln f_\Theta(x)$ — непрерывно дифференцируема по Θ
2. Информация Фишера $I(\Theta)$ существует и непрерывна по Θ

Теорема 2.1 (Неравенство Раво-Крамера)**.** Пусть $(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ — выборка объема n из регулярного семейства распределений F_Θ, $\Theta^* = \Theta^*(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ — несмещенная оценка параметра Θ, дисперсия которой ограничена на любом компакте в области Θ. Тогда

$$D\Theta^* \ge \frac{1}{nI(\Theta)}$$

Пример. Пусть $(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n) - \mathbb{X} \in N(a, \sigma^2),\ a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Проверим эффективность оценки $a^* = \overline{X}$.

$$f(x) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{e}^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$$

Возьмем $C = (-\infty, +\infty)$.

$$\ln f(x) = \ln \sigma - \frac{1}{2} \ln - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f(x) = \frac{x-a}{\sigma}$$

— непрерывна по a, $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$I(a) = E(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(x))' = \frac{1}{\sigma^2}$$

— непрерывна по a

$$Da^* = D\overline{X} = \frac{1}{a} D\mathbb{X} = \frac{\sigma^2}{a}$$

$$Da^* = \frac{\sigma^2}{a} = \frac{1}{nI(a)} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{a}$$

$\implies a^* = \overline{X}$

Примечание. Исправленная дисперсия S^2 также является эффективной оценкой для σ^2.
BLUE - оценки

$$\Theta^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$$