Лекция 0

Ilya Yaroshevskiy

3 сентября

Содержание

1 Лямбда Исчисление

Определение. Пусть X, Y — непустые множества. Отношение $R \subseteq X \times Y$ — **функциональное** отношение если Доделать

Определение. Пусть $Var = \{x_0, x_1, x_2\}$ — счетное множество переменных. Множество **предтермов** производится следующей грамматикой:

$$M, N \coloneqq x \mid (\lambda x.M) \mid (MN)$$

Примечание. Хотим отождествлять функции вообще говоря одинаковых, но различных графически(имена переменных).

Пусть α-конверсия — переименование связанных переменных. Введем отношение α-эквивалентности — рефлексивное, транзитивное, симметричное замыкание α-конверсии, которое отождествляет такие функции.

Определение. Лямбда терм — предтерм с точностью до α-эквивалентности

Определение. Лямбда трем M **β-редуцируется** к N, если есть способ переписать его по следующим правилам:

- $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x \coloneqq N]$
- $\frac{M_1 \to_\beta M_2}{M_1 N \to_\beta M_2 N}$
- $\frac{M_1 \to_\beta M_2}{N M_1 \to_\beta N M_2}$

Примечание. Терм $(\lambda x.M)N$ называется редуцируемым.

Определение. Терм называется **слабо нормализуемым**, если существует путь который заканчивается(приходим к терму который не редуцируется). **Сильно нормализуемым**, если любой путь заканчивается.

Пример.

$$\lambda xy.x(\lambda z.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$$

Можем проредуцировать его двумя способами:

1.

$$\begin{aligned}
&(\lambda xy.x)(\lambda z.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \\
&(\lambda y.[x \coloneqq (\lambda z.z)]((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))) \to_\beta \\
&(\lambda y.\lambda z.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \\
&(\lambda z.z)[y \coloneqq (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)] \to_\beta \\
&\lambda z.z
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
&(\lambda xy.x)(\lambda z.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \\
&(\lambda xy.x)(\lambda z.z)(xx)[x := [\lambda x.xx]] \to_\beta \\
&(\lambda xy.x)(\lambda z.z)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Примечание. Два способа редуцировать:

- $(\lambda x_1 \dots x_n.M)N_1 \dots N_n$ — **аппликативный** порядок. Сначала редуцируем $(N_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$
- $(\lambda x_1 \dots x_n.M)N_1 \dots N_n$ — **нормальный** порядок. Сначала редуцируем $(\lambda x_1 \dots x_n.M)N_1$, и т.д.

Теорема 1.1. Пусть M — терм, такой что есть нормальная форма M'
Тогда M может быть редуцирован к M' с помощью нормального порядка редукции.

1.1 Типы

Примечание. Система типов — синтаксический формализм который позволяет доказывать наличие поведенческий особенностей программы.

Определение. Просто типизированное лямбда-исчисление

- $\dfrac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$ — аксиома
- $\dfrac{\Gamma, x : A M : B}{\Gamma \lambda x.M : A \to B}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$

Примечание. $x : A$ — x принадлежит типу A.

Примечание. Γ — конечный набор утверждений, которые говорят что какая-то переменная имеет какой-то тип.

Примечание. $\Gamma \vdash N : A$ — С использованием переменных из Γ можем построить терм N имеющий тип A.

Примечание. В типизированном лямбда-исчислении функция типа $A \to B$ — функция высшего порядка, если $A : C \to D$

Пример.

```
changeTwiceBy :: (Int -> Int) -> Int -> Int
changeTwiceBy operation value = operation (operation value)
```

```
changeTwiceBy :: (String -> String) -> String -> String
changeTwiceBy operation value = operation (operation value)
```

Можем написать одну функцию для абстрактного типа `a`:

```
changeTwiceBy :: (a -> a) -> a -> a
changeTwiceBy operation value = operation (operation value)
```

1.2 Система F

Примечание. Версия Curry:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash M : p.A} \quad p \notin rng(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall p.A}{\Gamma M : A[p := B]}$$

Примечание. Версия Church: Исправить

$$\frac{\Gamma, p \vdash M : A}{\Gamma \vdash \forall p.M : \forall p.A}$$

$$\frac{\Gamma \forall p.A}{\Gamma \vdash M[B] : A[p := B]}$$

Примечание. Система типов Хиндли-Миллера

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash M : \forall \vec{p}.A} \quad \vec{p} \notin rng(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall p.A}{\Gamma \vdash M : A[p \coloneqq B]}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \lambda x.M : A \to B}$$

, где A — свободная от кванторов.