Лекции по Теории вероятностей 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Оглавление

Лекция 1 **4**
1.1 Статистическая вероятность . . . 4
1.1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события . . . 4
1.1.2 Операции над событиями . . . 5
1.1.3 Классическое определение вероятности . . . 5
1.1.4 Геометрическое понятие вероятности . . . 6

Лекция 2 **9**
2.1 Аксиоматическое опредление вероясности . . . 9
2.1.1 Свойства операция сложения, умножения . . . 11
2.1.2 Независимые события . . . 12

Лекция 3 **14**
3.1 Условная вероятность . . . 14
3.1.1 Формула умножения вероятности . . . 14
3.1.2 Полная группа событий . . . 15
3.1.3 Формула полной вероятности . . . 15

Лекция 4 **17**
4.1 Схема Бернулли . . . 17
4.1.1 Наиболее вероятное число успехов . . . 18
4.1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли . . . 19
4.2 Статистическое определение вероятности . . . 20
4.2.1 Вероятность отклонения относительной частоты . . . 21
4.2.2 Закон больших чисел Бернулли . . . 21

Лекция 5 **22**
5.1 Схемы испытаний и соответствующие распределения . . . 22
5.1.1 Схема до первого успешного испытания . . . 22
5.1.2 Испытание с несколькими исходами . . . 23
5.1.3 Урновая схема . . . 24
5.1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли . . . 25

Лекция 6 **27**
6.1 Случайные величины . . . 27
6.1.1 Смысл измеримости . . . 28
6.1.2 Типы распределения . . . 28

Лекция 7 **33**
7.1 Стандартное дискретное распределение . . . 33
7.1.1 Биномиальное распределение . . . 33
7.1.2 Геометрическое распределение . . . 33
7.1.3 Распределение Пуассона . . . 34
7.1.4 Функция распределения . . . 34
7.2 Абсолютно непрерывные случайные величины . . . 36
7.2.1 Свойства плотности и функции распределения . . . 37
7.2.2 Числовые характеристики . . . 38

Лекция 8 **39**
8.1 Стандартное абсолютно непрерывное распределение . . . 39
8.1.1 Равномерное распределение . . . 39
8.1.2 Экспоненциальное распределение . . . 40
8.1.3 Нормальное распределение . . . 40
8.1.4 Стандартное нормальное распределение . . . 41
8.1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия . . . 41
8.1.6 Коэффициенты асимметрии и эксцесса . . . 42
8.1.7 Гамма функция и гамма распределение . . . 43

Лекция 9 **44**
9.1 Сингулярное распределение . . . 44
9.2 Общий взгляд на математическое ожидание . . . 44
9.3 Преобразование случайных величин . . . 45
9.3.1 Стандартизация случайной величины . . . 46
9.3.2 Линейное преобразование . . . 46
9.3.3 Квантильное преобразование . . . 47

Лекция 10 **48**
10.1 Сходимость случайных величин . . . 48
10.1.1 Сходимость ‘почти наверное‘ . . . 48
10.1.2 Сходимость по вероятности . . . 48
10.1.3 Сходимость по функции распределения . . . 48
10.1.4 Связь между видами сходимости . . . 48
10.2 Свойство моментов . . . 49
10.2.1 Ключевые неравенства . . . 49
10.3 Среднее арифметическое случайных величин . . . 50
10.4 Законы больших чисел . . . 50
10.4.1 Закон больших чисел Чебышева . . . 50
10.4.2 Закон больших чисел Бернулли . . . 50
10.4.3 Закон больших чисел Хинчина . . . 50
10.4.4 Усиленный закон больших чисел Колмогорова . . . 50
10.4.5 Закон больших чисел Маркова . . . 51
10.5 Центральная предельная теорема . . . 51

Лекция 11 **52**
11.1 Совместное распределение случайных величин . . . 52

Лекция 12 **53**
12.1 Формула свертки 53
12.2 Сумма стандартных распределений 53
12.3 Условное распределение 55

Лекция 13 **56**
13.1 Условное математическое ожидание (УМО) 57
13.1.1 Числовые характеристики зависимости случайных величин 59
13.1.2 Коэффициент линейной ковариации 59

Лекция 14 **61**
14.1 Комплексная случайная величина 61
14.1.1 Характеристические функции стандартных распределений 62
14.1.2 Доказательство основных теорем 64
14.1.3 Предельная теорема Муавра-Лапласа 64

Лекция 1

1.1 Статистическая вероятность

n — чсло экспериментов
n_A — число выполнения события A Отношение $\frac{n_A}{n}$ — частота события A
$P(A) \approx \frac{n_A}{n},\ n \to +\infty$

1.1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события

Определение. Пространством элементарных исходов называется множество содержащее все возможные результаты данного эксперимента из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются **элементарными исходами**

Обозначение.

- Пространство элементарных исходов — Ω
- Элементарный исход $w \in \Omega$

Определение. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. Событие A **наступило** если в ходе эксперимента произошел один из элементарных исходов $w \in A$. w — благоприятный к A

Пример. Бросаем один раз монету. $\Omega = \{H, T\}$.
H — Head(орел), T — Tail(решка)

Пример. Бросаем кубик. $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Выпало четное число очков. $A = \{2, 4, 6\}$

Пример. Монета бросается дважды

- Учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- Не учитываем порядок. $\Omega = \{HH, HT, TT\}$

Пример. Бросается дважды кубик. Учитывем порядок.
Число очков кратно 3. $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), \dots\}$

Пример. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{(H), (T, H), (T, T, H), \dots\}$ — счетное число исходов

Пример. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \big| x, y \in \mathbb{R}\}$ — нечетное число исходов

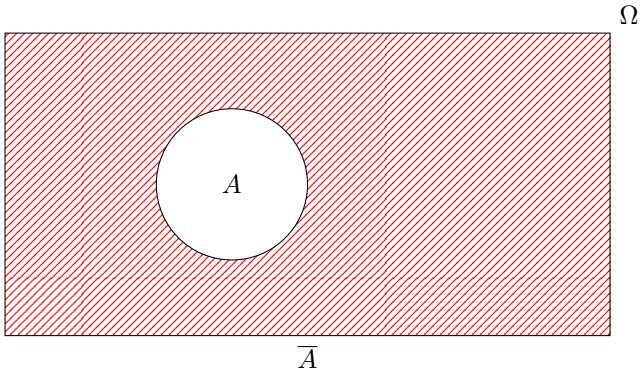
1.1.2 Операции над событиями

Определение. Ω — универсальное событие, достоверное, наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы
$\emptyset$ — невозможное событие, никогда не выполняется, т.к. не одержит элементарных исходов

Определение. Суммой событий $A + B$ называется событие $A \cup B$ — событие состоящее в том что произошло событие A или событие B, т.е. хотя бы одно из них

Определение. Произведением $A \cdot B$ называется событие $A \cap B$ — событие состоящее в том что произошло событие A и событие B, т.е. оба из них

Определение. Противоположным к A называется событие $\overline{A}$ — состоящее в том событие A не произошло



Определение. Дополнение

Определение. События A и B называются **несовместными** если $A \cdot B = \emptyset$, т.е. в ходе эксперимента может наступить только одно из них

Определение. Событие A **влечет** событие B, если $A \subset B$

Определение. $P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A

1.1.3 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, при чем их можно считать равновозможным. Тогда применимо классическое определение вероятности

Определение. Вероятность события A $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных элеметарных исходов, m — число элементарных исходов благоприятных событию A. В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$

Примечание. Свойства:

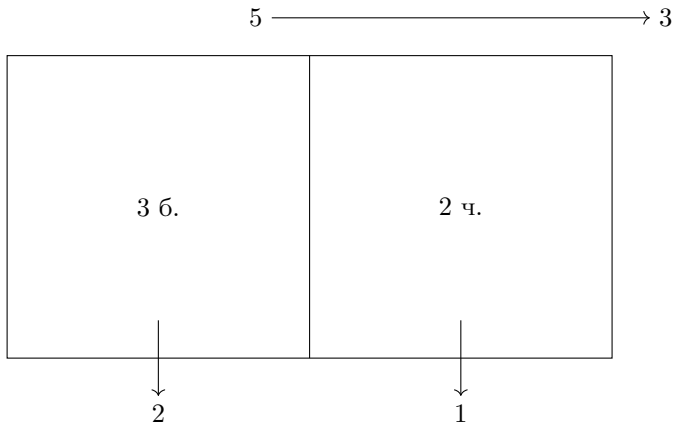
1. $0 \leq P(A) \leq 1$

4. Если события A и B несовместны то вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. $]|A| = m_1, |B| = m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$
$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$ □

Пример. Найти вероятность того, что при бросании кости выпадет четное число очков
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\ A = \{2,4,5\},\ P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Пример. В ящике 3 белых и два черных шара. Вынули 3 шара, найти вероятность того что из них 2 белых и 1 черных



$$n = C_5^3 = 10$$
$$m = C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$$
$$P(A) = \frac{6}{10}$$

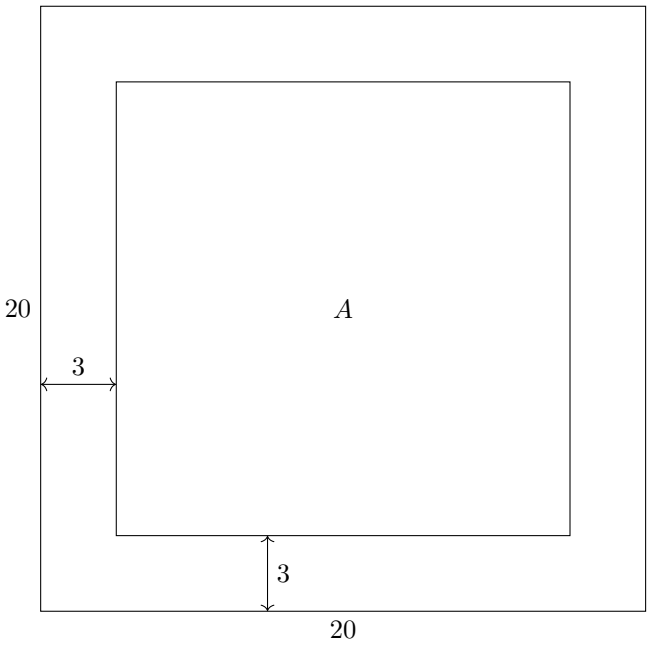
1.1.4 Геометрическое понятие вероятности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченая область
$\mu(\Omega)$ — конечная мера множества Ω (например мера Римана, т.е длина, площадь, объем) В эту область *наугад* бросаем точку. Термин *наугад* означает, что вероятность попадания в область A зависит только от меры этой области, но не зависит от ее положения. Вероятности попадания в любые точки равновозможны. Тогда применимо геометрическое определение вероятности.

Определение. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(\Omega)$ — мера Ω, $\mu(A)$ — мера благоприятной области A

Примечание. Заметим что по этому определению, мера точки равна 0 и веротяность попадания в конкретную точку равна 0, хотя это событие не является невозможным.

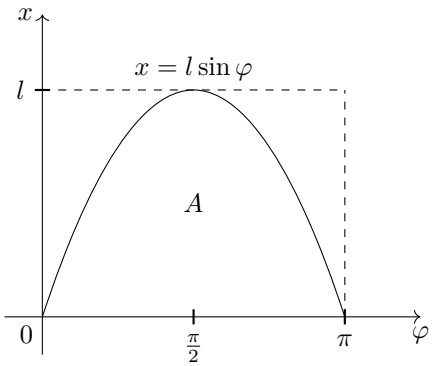
Пример. Игра. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того что монета целиком окажется на одной плитке



$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Задача 1. Пол выложен ламинатом. На пол бросается игла длиной равной ширине доски. Найти вероятность того что она пересечет стык

Решение. $2l$ — длина иглы, x — расстояние от центра иглы до ближайшего края, φ — угол к ближайшему краю
Игла пересечет край если $x \leq |AB|$, $|AB| = l \sin\varphi$
Можно считать что положение от центра и угол, независимы друг от друга. $x \in [0, l]. \varphi \in [0, \pi]$



$$A : x \leq l \sin \varphi$$
$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$
$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = 2l$$
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$

Лекция 2

2.1 Аксиоматическое опредление верояности

Колмагоров

- Ω — пространство элементарных исходов

Систему $\mathcal{F} \subset \Omega$ называем **σ-алгеброй событий** если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Свойства:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство.
   $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$ □

3. (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$
   (b) $F = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$

Определение.]Ω — пространство элементарных исходовб $\mathcal{F}$ – его σ-алгебра. **Вероятностью** на $(\Omega, \mathcal{F})$ обозначается функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство **неотрицательности**
2. Если события $A_1, A_2, \dots$ — попарно несовместны($\forall i, j : \ A_i \cap A_j = \emptyset$), то:

$$P(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

   — свойство **счетной аддитивности**

3. $P(\Omega) = 1$ — свойство **нормированности**

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — **вероятностное пространство**

Примечание. Свойства:

1. $P(\emptyset) = 0$

   Доказательство. $\emptyset$ и Ω — несовместные события

$$P(\underbrace{\emptyset + \Omega}_{\Omega}) = P(\emptyset) + P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) + 1 = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

□

2. Формула обратной вероятнсоти

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

   Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместные, $A \cup \overline{A} = \Omega$

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

□

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Доказательство.

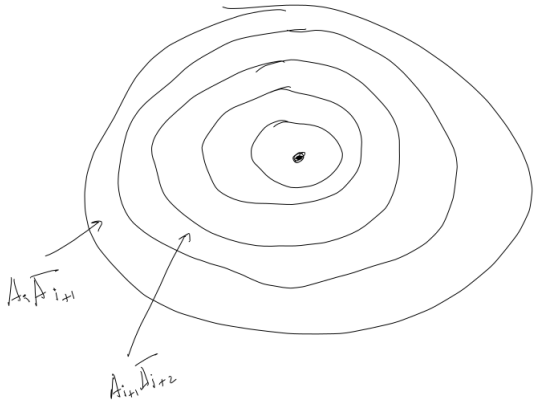
   (a) $P(A) \geq 0$
   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

□

Аксиома 1. *Пусть имеется убывающая цепочка событий* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$ *<u>Тогда</u>* $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Примечание. При непрерывном изменении области $A \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

Доказательство.



$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i\overline{A_{i+1}} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

т.к. эти события несовместны

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) + P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i)$$

т.к. $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \emptyset$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}})$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) = P(A_i)$$

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

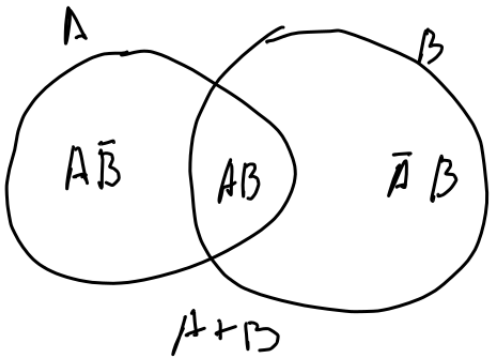
Примечание. Аксимома счетной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности

2.1.1 Свойства операция сложения, умножения

Определение.

1. Свойство дистрибутивности $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения. Если A и B — несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
   если совместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

   Доказательство.



$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B \Rightarrow P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) =$$
$$= P(A\overline{B}) + P(AB) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

Задача 2. n писем раскладываются в n конвертов. Найти вероятнсоть того что хотя бы одно письмо попадет в свой коверт. Чему равна эта вероятность при $n \to +\infty$

Решение. A_i — i письмо попало в свой коверт
A — хотя бы одно письмо попало в свой конверт

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$
$$P(A_i) = \frac{1}{n},\ P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2},\ P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}, \dots P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$
$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{A_n^2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$
$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$
$$P(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-1}$$

2.1.2 Независимые события

Примечание. $\Omega = n$, $|A| = m_1$, $|B| = m_2$
$|\Omega \times \Omega| = n^2$, $AB = m_1m_2$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Примечание. Свойство: если A и B — независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы

Доказательство. $P(A) = P(A(B + \overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A$ и $\overline{B}$ — независимы □

Определение. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \le i_1, i_2, \dots, i_k \le n$ $P(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

Примечание. Если события независимы в совокупности, то события независимы попарно(при $k = 2$). Обратное неверно

Пример (Берштейна). Три грани правильного тетраэдра выкрашены в красный, синий, зленый цвета, а четвертая грань во все эти три цвета
]A — грань содержит красный цвет, B — синий, C — зеленый

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ все события попарно независимы

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ события не независимы в совокупности

Примечание. Если в условии есть “хотябы“, т.е. требуется найти вероятность совместных независимых событий, то применяем формулу обратной вероятности

Задача 3. Найти веротяность того, что при 4 бросаниях кости, хотябы один раз выпадет шестерка.

Решение.]A_1 — при 1 броске “6“, A_2 — при 2х бросках “6“, $\ldots$, A — хотя бы один раз “6“

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$$

$\overline{A}$ — ни разу не выпадет

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Задача 4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого — 0.6, второго — 0.8

Решение. A_1 — 1й попал
A_2 — 2й попал
A — один попал

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$$

$$P(A) = P(A) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$$

Лекция 3

3.1 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно что выпало больше трех очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

- A — четное число очков
- B — больше 3 очков

Тогда:

- $n = 3$ $(4, 5, 6)$
- $m = 2$ $(4, 6)$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

При интерпретация с геометрическим определением вероятностей также получаем формулу $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

Определение. Условной вероятностью события A при условии того что имело место событие B называется величина:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

— **формула условной вероятности**

3.1.1 Формула умножения вероятности

Как следствие формулы условной вероятности получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ или } P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Теорема 3.1.1.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство. По индукции □

Примечание. $P(A) \neq 0$ и поэтому формула умножения удовлетворяет

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) \neq 0$$

Примечание.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Доказательство. Очевидно □

Задача 5. В коробке 3 красных крандаша и 2 синих. Вынули 3 карандаша. Найти вероятность того что первые два красные а третий синий.

Решение.

- A_1 — 1-й красный
- A_2 — 2-й красный
- A_3 — 3-й синий

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Примечание. Прменяем когда учитывается порядок

3.1.2 Полная группа событий

Определение. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуюти полную группу событий если они попарно несовместны, и содержат все элементарные исходы:

- $P(H_i H_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Примечание. Часто события из полной группы называются гипотезами

3.1.3 Формула полной вероятности

Теорема 3.1.2 (Баеса)**.** $]H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ — полная группа событий
<u>Тогда</u>

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Пример. В первой коробке 4 белых и два черных шара, во второй 1 белый и два черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки достали шар. Найти вероятность того что он оказался белый

Решение.

- $]H_1$ — переложили 2 белых
- $]H_2$ — переложили 2 черных
- $]H_3$ — переложили 1 черный и 1 белый

- $]A$ — из второй коробки достали белый

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$
$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$
$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$
$$\sum P(H_i) = 1 \text{ — верно}$$
$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(A|H_2) = \frac{1}{5}$$
$$P(A|H_3) = \frac{2}{5}$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)(A|H_1) + P(H_2)(A|H_2) + P(H_3)(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

Задача 6. По статистике 1% населения болен раком. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным. Найти веротяность того что человек болен.

Решение.] $\left.\begin{array}{l} \text{H}_1 \text{ — болен} \\ \text{H}_2 \text{ — здоров} \end{array}\right\}, A$ — тест положительный

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(A|H_1) = 0.99$
- $P(A|H_2) = 0.01$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{1}{2}$$

Сделаем второй тест:

- $P(H_1) = 0.01$
- $P(H_2) = 0.99$
- $P(AA|H_1) = 0.99^2$
- $P(AA|H_2) = 0.01^2$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Лекция 4

4.1 Схема Бернулли

Определение. Схемой Бернулли называется серия независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода, каждое интересующее нас событие либо произошло либо не произошло.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- ν_k — число успехов при k испытаниях
- $P_n(k) = P(\nu_k = k)$

Теорема 4.1.1. Вероятность того что при n испытаниях произойдет ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{УУ}\ldots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{n-k}$ — независимые события

- $P(\text{У}) = p$
- $P(\text{Н}) = q$

$$P(A_1) = \underbrace{pp\ldots p}_{k}\underbrace{qq\ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

□

Задача 7. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Найти вероятность того что при 5 выстрелах будут 3 попадания

Решение.

- $n = 5$
- $p = 0.8$

- $q = 0.2$
- $k = 3$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

4.1.1 Наиболее вероятное число успехов

Выясним при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не больше чем вероятность k успехов

$$P_n(k-1) \leq P_n(k)$$

$$C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k qn - k$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \leq \frac{n!}{(k!(n-k)!)} p$$

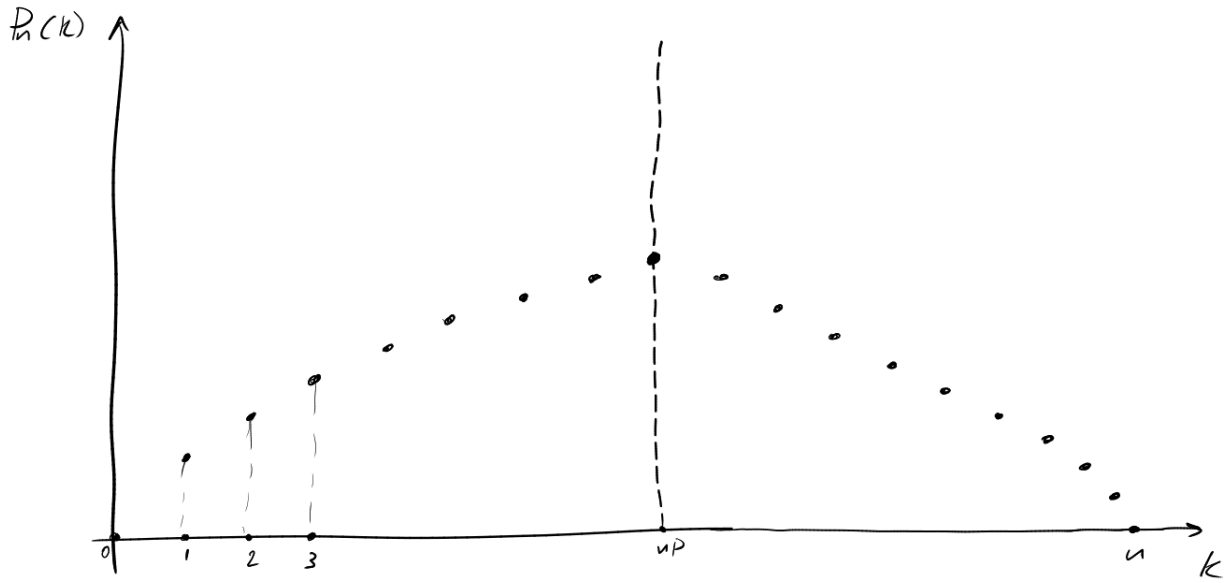
$$\frac{k!}{(k-1)!} q \leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p$$

$$k(1-p) \leq (n-k+1)p$$

$$k \leq np + p$$

Так как k — целое то выполняется: $np + p - 1 \leq k \leq np + p$
Рассмотрим три ситуации:

1. np — целое. Тогда $np + p$ — целое и $k = np$ — наиболее вероятное число исходов
2. $np + p$ — не целое. Тогда $k = [np + p]$
3. $np + p$ — целое. Тогда $np + p - 1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и имеем два наиболее вероятных числа успехов:
   - $k = np + p$
   - $k = np + p - 1$



4.1.2 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Определение. Локальная формула Муавра-Лапласа. Применяем когда требуется найти вероятность точного числа успехов.

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ — функция Гаусса.
Свойства функции Гаусса $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — четная
2. при $x > 5,\ \varphi(x) \approx 0$

Определение. Интегральная формула Лапласа. Применяем если число успехов лежит в неком диапазоне.

$$P_n(k_1 \le \nu_n \le k_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

— функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства $\Phi(x)$:

1. $\Phi(-x) = \Phi(x)$ — нечетная

2. при $x > 5,\ \Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{z^2} 2dz$$

$$F_0(x) = 0.5 + \Phi(x) \text{ или } \Phi(x) = F_0(x) - 0.5$$

Примечание. Формулу применяем при $n \geq 100$ и $p, q \geq 0.1$

Задача 8. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того что

1. произошло ровно 330 попаданий
2. произошло от 312 до 336 попаданий

Решение.

1. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 1.25$$

$$P_{400}(330) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

2. $n = 400, p = 0.8, q = 0.2, k_1 = 312, k_2 = 336$

$$x_1 = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq \nu_n \leq 336) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8185$$

4.2 Статистическое определение вероятности

- n_A — число появления события A при n испытаниях
- $\frac{n_A}{n}$ — частота события A

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}, \text{при } n \to \infty$$

4.2.1 Вероятность отклонения относительной частоты

$]p$ — вероятность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A
По интегральной формуле Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon) = P(-n\varepsilon \leq n_a - np \leq n\varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n)$$

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n}{\sqrt{npq}}$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

4.2.2 Закон больших чисел Бернулли

Более точно последняя формула выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

при $n \to \infty$ $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon \to \infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \to 0.5$

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \to 2 \cdot 0.5 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

— закон больших чисел Бернулли
То есть при большом числе испытаний, будет близко к реальной вероятности

Лекция 5

5.1 Схемы испытаний и соответствующие распределения

- n — число испытаний
- p — вероятность при одном испытании
- $q = 1 - p$ — вероятность неудачи при одном испытании

Определение.

$$k \to C_n^k p^k q^{n-k}$$

— биномиальное распределение с параметрами n и p

Обозначение. $B_{n,p} = B(n,p)$

5.1.1 Схема до первого успешного испытания

Определение. Схема до первого успешного испытания. Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха под номером τ

Теорема 5.1.1. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$

Доказательство.

$$p(\tau = k) = p(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{k-1}\underset{k}{\underset{\uparrow}{\text{У}}}) = q^{k-1}p$$

□

Определение. $k \to q^{k-1}p,\ 1 \le k \le \infty$ — называется **геометрическим распределением** с параметром t

Обозначение. G(p)

Примечание. Это распределение обладает так называемым свойством отсутствия после действия или свойством нестарения

Теорема 5.1.2. $]p(\tau = k) = q^{k-1}p$
<u>Тогда</u> $\forall n, k \in \mathbb{N}\ p(\tau > n + k | \tau > n) = p(\tau > k)$

Доказательство. По формуле условной вероятности:

$$p(\tau > n+k|\tau > k) = \frac{p(\tau > n+k \text{ и } \tau > j)}{p(\tau > n)} = \frac{p(\tau > n+k)}{p(\tau > n)} \tag{5.1}$$

$p(\tau > m) = p(\text{первые } m \text{ неудач}) = q^m$

$$5.1 = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

Примечание. То, проработает ли девайс k часов после этого, не зависит от того сколько проработал до этого

Примечание. Также $p(\tau = n+k|\tau > n) = p(\tau = k)$

5.1.2 Испытание с несколькими исходами

Пусть при n испытаниях могут произойти m несовместных исходов

- p_i — вероятность i-го исхода при одном отдельном испытании

Теорема 5.1.3. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, ..., m-й n_m раз. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ <u>Тогда</u>

$$p(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Доказательство. $A_1 = \underbrace{11\dots1}_{n_1}\underbrace{22\dots2}_{n_2}\dots\underbrace{m\dots m}_{n_m}$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} \dots p_n^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расположением i-х исходов по n местам, а вероятности будут те-же. Всего таких исходов будет:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

— формула для перестановок с повторениями □

Задача 9. Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из 6 партий. Вероятность ничьи при одной партии — 0.5. Найти вероятность того, что второй игрок две партии выиграл, а три партии свел в ничью

Решение. Исходы:

1. первый выиграл
2. второй выиграл
3. ничья

$$p_3 = \frac{1}{2};\ p_1 = p_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};\ n = 6$$

$$P(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{2^7}$$

5.1.3 Урновая схема

В урне N шаров. Из них K белых, а черных $N-K$. Из нее выбираем n шаров без учета порядка. k — число вынутых белых

Теорема 5.1.4 (Схема с возвратом)**.** Вероятность вынуть белый шар не меняется.
Тогда

$$p = \frac{K}{N} \quad p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

— биномиальное распределение

Теорема 5.1.5 (Схема без возврата)**.** Тогда

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Определение.

$$k \to \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},\ k \le K$$

называется **гипергеометрическим** распределением вероятности

Лемма 1.

$$C_K^k \sim \frac{K^k}{k!}$$

, при $K \to \infty, K = const$

Доказательство.

$$C_K^k = \frac{K!}{k!(K-k)!} = \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)}{K^k} \cdot \frac{K^k}{k!} =$$

$$= \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right)}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{K^k}{k!} \sim \frac{K^k}{k!}$$

□

Теорема 5.1.6.

- $N \to \infty$
- $K \to \infty$
- $\frac{K}{N} \to p \in (0,1)$
- n и $0 \le k \le K$ — фиксированы

Тогда

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \to C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Доказательство.

$$P_{N,K}(n,k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{K^k}{k!} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{K^k}{N^k} \cdot \frac{(N-K)^{n-k}}{N^{n-k}} =$$

$$= C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \xrightarrow[N\to\infty]{} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

□

5.1.4 Схемы Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Схема: вероятность успеха при одном отдельном испытании зависит от числа испытаний n таким образом, чтобы $n \cdot p_n = \lambda$(точнее $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$)
Появление очень редких событий в длинном потоке испытаний

Теорема 5.1.7 (Формула Пуассона)**.** Пусть $n \to \infty,\ p_n \to 0$, так что $np_n \to \lambda > 0$
Тогда вероятность k успехов при n испытаниях

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство. Положим $\lambda_n = np_n$

$$p(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

1. Оценка погрешности в формуле Пуассона

   Теорема 5.1.8. Пусть ν_n – число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью p

   $$\lambda = np \quad A \subset \{0, 1, 2, \cdots n\} \text{ — произвольное подмножество}$$

   Тогда погрешность

   $$\left| p(\nu_n \in A) - \sum_{k\in A} \frac{\lambda_k}{k!} e^{-\lambda} \right| \le \min(p, \lambda p) = \min(p, np^2) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

   Примечание. Формулу Пуассона иногда называют формулой редких событий. Применяем при малых p, $n \ge 100$

   Задача 10. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента $\frac{1}{1000}$. Какова вероятность отказа больше двух элементов

   Решение.

   $$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

   , где $\lambda = np$

- $n = 1000$
- $p = 0.001$
- $\lambda = np = 1$
- $k > 2$

$$p(\nu_n > 2) = 1 - p(\nu_n \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \approx 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\right) =$$

$$= 1 - 2.5e^{-1} \approx 0.0803$$

Погрешность $\varepsilon \leq \min(p, \lambda p) = 0.001$

Лекция 6

6.1 Случайные величины

Обозначение. ξ — **Случайная величина**

Пример. ξ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Пример. ξ — время работы микросхемы до отказа

1. Время работы в часах
   $\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. Время работы измеряем точно
   $\xi \in [0, +\infty]$

Пример. ξ — температура воздуха в случайный момент времени. $\xi \in (-50°, 50°)$

Пример. Индикатор события A.

$$I_A(\omega) \in \begin{cases} 0 & ,\omega \notin A \\ 1 & ,\omega \in A \end{cases}$$

Определение. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **$\mathcal{F}$-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R} :\ \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Т.е прообраз $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

Определение. Случайной величиной ξ заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ называется $\mathcal{F}$-измеримая функция Исправить, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу ω некоторое вещественное число

Пример. Бросаем кость.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $]\xi(i) = i$

Если $x = 4$, то $\{\omega | \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Rightarrow \xi$ не является $\mathcal{F}$-измеримой

6.1.1 Смысл измеримости

Пусть случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая. Тогда $P(\xi < x) = P(\{\omega|\xi(\omega) < x\})$, т.к. $A_x = \{\omega|\xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\overline{A_x} = \{\omega|\xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$$

$$A_x \setminus B_y = \{\omega|t \leq \xi(\omega) lex\} \in \mathcal{F}$$

$$B_x = \boxed{\text{Доделать}}$$

$$B_x \setminus A_x = \{\omega|\xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда видим, по теореме Каво? Исправить можно однозначно продолжить до любого Борелевского множества на прямой. $B \in \mathcal{B}$ — Борелевская σ-алгебра. $P(B \in \mathcal{B}) = P\{\omega|\xi(\omega) \in B\}$
Пусть случайная величина задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, p) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, p)$ — новое вероятностное пространство
2. $\xi^{-1}(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$
   $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$
   $\mathcal{F}_\xi$ — σ-алгебра порожденная величиной ξ

Задача 11. Найти σ-алгебру порожденную индикатором

Определение. Функция $P(B)$ $B \in \mathcal{B}$ называется **распределением вероятностей** случайной величины $\xi(\omega)$. Т.е. распределение случайной величины это соответствие множествами на вещественной прямой и вероятностями случайной величины попасть в это множество

6.1.2 Типы распределения

- Дискретные
- Абсолютно непрерывные
- Смешанные
- Сингулярные (непрерывные но не абсолютно непрерывные)

1. Дискретные Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений, т.е. существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, такой что
   (a) $p_i = p(\xi = x_i) > 0$
   (b) $\sum\limits_i p_i = 1$

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

   Доделать

   Пример. Кость

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Доделать

(a) Основные числовые характеристики

i. Математическое ожидание(среднее значение) **Математическим ожиданием** случайной величины ξ называется число:

$$E\xi = \sum_i x_i p_i$$

при условии что данный ряд сходится абсолютно, иначе говорят что математическое ожидание не существует

Обозначение. $\mathrm{E}\xi$

Примечание. Смысл: среднее значение, число вокруг которого группируется значения случайной величины. Физический смысл: центр масс. Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений при большом значении реальных экспериментов

ii. Дисперсия

Определение. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется среднее квадратов отклонений ее от математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

или

$$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$

При условии что данное среднее значение существует(конечно)

Примечание. Вычислять дисперсию удобнее по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E\xi)^2$$

Примечание. Смысл: квадрат среднего разброса(рассеяния) случайной величины около ее математического ожидания

iii. Среднее квадратичное отклонение

Определение. Средним квадратичным отклонением ($\sigma_\xi = \sigma(\xi)$) случайной величины ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

Примечание. Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около ее математического ожидания

Пример. Бросаем кость

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$D\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = 2.92$$

$$\sigma = \sqrt{2.92} \approx 1 \neq 1$$

(b) Свойства математического ожидания и дисперсии

Определение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = C = const$ $\forall \omega \in \Omega$ или $p(\xi = C) = 1$

$$E\xi = C = const$$

$$D\xi = 0$$

Доказательство. Доделать □

Определение (Свойство сдвига)**.**

$$E(\xi + C) + E\xi + C$$

$$D(\xi + C) = D\xi$$

Доказательство. Доделать □

Определение.

$$E(C\xi) = CE\xi$$
$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Доказательство. Доделать □

Определение.

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство.

- Пусть x_i, y_i — соответствующие значения случайных величин xi и mu

$E(\xi+\eta) = \sum_{i,j}(x_i+y_j)p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum p(\xi = x_i, \eta = y_j)$

Доделать □

Определение. Дискретные случайные величины **независимы** если $\forall i, j$ $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j)$

Примечание. Если xi и η независимы, то

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

обратное не верно

Доказательство.

$$E(\xi\eta) = \sum_{ij}(x_i y_j)p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_j)p(\eta = y_j) = \sum_i x_i p(\xi = x_i) \cdot \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

Доказательство.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E(E\xi)^2 =$$
$$E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

Примечание.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{Cov}(\xi, eta)$$

, где $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$ — **ковариация**

Доказательство.

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - 2E\xi \cdot E\eta - (E\eta)^2 =$$
$$D\xi + D\eta + 2(E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta)$$

□

Примечание. Если случайные величины ξ и η независимые, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + \eta$$

Доказательство. По свойству $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$ □

Примечание. Среднее квадратичное отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой, т.е.

$$D\xi = \min_a (y - a) \boxed{\text{Исправить}}$$

Доказательство.

$$E(\xi - a)^2 = E((\xi - E\xi) + (E\xi - a))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + \underbrace{2E(\xi - E\xi) \cdot (E\xi - a)}_{0} + (E\xi - a)^2 =$$
$$= D\xi + (E\xi - a)^2 \leq D\xi$$

□

(c) Другие числовые характеристики

Примечание.

$$m_k = E\xi^k$$

— момент k-того порядка

В частности $m_1 = E\xi$

Примечание.

$$E|\xi|^k$$

— абсолютный момент k-того порядка

Примечание.

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$$

— центральный момент k-того порядка
В частности $\mu_2 = D\xi$

Примечание.

$$E|\xi - E\xi|^2$$

— абсолютный центральный момент k-того порядка

Примечание. Центральные моменты можно выразить через относительные моменты

Доделать

Примечание. **Модой** Mo называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей

$$p(\xi = \mathrm{Mo}) = \max_i p_i$$

Определение. Медианой Me называется значение случайной величины такое что,

$$p(\xi < \mathrm{Me}) = p(\xi > \mathrm{Me}) = \frac{1}{2}$$

Лекция 7

7.1 Стандартное дискретное распределение

7.1.1 Биномиальное распределение

Обозначение. $B_{n,p}$

Определение.

- ξ — число успехов при n испытаниях
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow p(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Примечание. $B_p = B_{1,p}$

ξ	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	$\binom{n}{1} p \cdot q^{n-1}$	$\dots$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$$

, при $\xi_i \in B_{n,p}$

$$E\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = pq$$

$$E\xi = \sum_{i=0}^{n} E\xi_i = np$$

$$D\xi = \sum_{i=0}^{n} D\xi_i = npq$$

7.1.2 Геометрическое распределение

Обозначение. G_p

Определение.

- ξ — номер первого успешного испытания
- p — вероятность успеха при одном испытании

$$\xi\ inG_p \Leftrightarrow p(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad ,1 \le k \le \infty$$

xi	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	p	$(1-p)\cdot p$	$\dots$	$(1-p)^{k-1}\cdot p$	$\dots$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{n=0}^{\infty} q\right)' = p\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(k\cdot(k-1)+k)\cdot q^{k-1} + p\sum_{k=1}^{\infty} k\dot{q}^{k-1} = \frac{22q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

7.1.3 Распределение Пуассона

Определение. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $k > 0$, если

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad ,0 \le k < \infty$$

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda\cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}\cdot e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$	$\dots$

$$E\xi = \lambda$$

$$E\xi^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$D\xi = \lambda$$

$$= \sqrt{\lambda}$$

7.1.4 Функция распределения

Определение. $F\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция

$$F\xi(x) = p(\xi < x)$$

Пример.

ξ	0	1
p	1 - p	p

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1-p & 0 < x \le 1p, x > 1 \end{cases}$$

1. Свойства функции распределения

   Свойство 1. $F(x)$ — *ограниченная функция*

   Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция*

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

   Доказательство. Доделать □

Свойство 3.

$$p(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Доказательство. Доделать □

Следствие 7.1.0.1. Т.к. Борелевская σ-алгебра порождается интервалами, то зная функцию распределения можем найти вероятность попадания случайной величины в любое Борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, а значит полностью задается функцией распределения

Свойство 4.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$$

Т.к. функция $F(x)$ — ограничена и монотонна, то эти пределы существуют.

Свойство 5. $x_n \to \pm\infty$

$$]A_n = \{\omega \in \Omega | n-1 \le \xi(\omega) < n\}$$

$$1 = p(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(F(n) - F(n-1) = \lim_{n\to 0}) = \lim_{N\to 0}\sum_{-N}^{N}(F(n) - F(n-1)) =$$

$$= \lim_{N\to 0}(F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N\to 0} F(N) - \lim_{N\to\infty} F(-N-1) = 1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} F(N) = 1$$

Доделать

Свойство 6. *$F(x)$ — непрерывна слева, т.е. $F(x_0 - 0) = F(x_0)$*

Доказательство.

- $]B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_o\}$

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset$$

Следовательно по аксиоме непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} p(B_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(B_n) = \lim_{n\to\infty}(F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) =$$

$$= F(x_0) - \lim_{n\to\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = F(x_0) \Rightarrow F(x_0 - 0) = F(x_0)$$

□

Свойство 7. *Скачок в точке x_0 равен вероятности в этой точке.*

$$F(x_0+0)-F(x_0)=p(\xi=x_0)$$

или

$$F(x_0+0)=F(x_0)+p(\xi=x_0)=p(\xi\le x_0)$$

Доказательство.

- $C_n=\{x_0<\xi<x_0+\frac{1}{n}\}$

По аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to\infty}p(C_n)=0$

$$p(C_n)+p(\xi<x_0)=p(\xi=x_0)$$

$$p(x_0\le\xi<x_0+\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}p(\xi=x_0)$$

$$F(x_0+\frac{1}{n})-F(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}p(\xi=x_0)$$

$$F(x_0+0)-F(x_0)=p(\xi=x_0)$$

□

Свойство 8. *Если $F(x)$ непрерывна в точке x_0, то $p(\xi=0)=0$. Следствие из 6*

Свойство 9. *Если $F(x)$ непрерывна то, $p(x_1\le\xi<x_2)=p(x_1<\xi<x_2)=p(x_1\le\xi\le x_2)=p(x_1<\xi\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$*

Свойство 10. *Случайная величина ξ имеет дискретное распределение $\Leftrightarrow$ ее функция распределения – ступенчатая функция*

7.2 Абсолютно непрерывные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное** распределение, если для лобового Борелевского множества $B\in\mathfrak{B}$

$$p(\xi\in B)=\int\limits_B f_\xi(x)dx$$

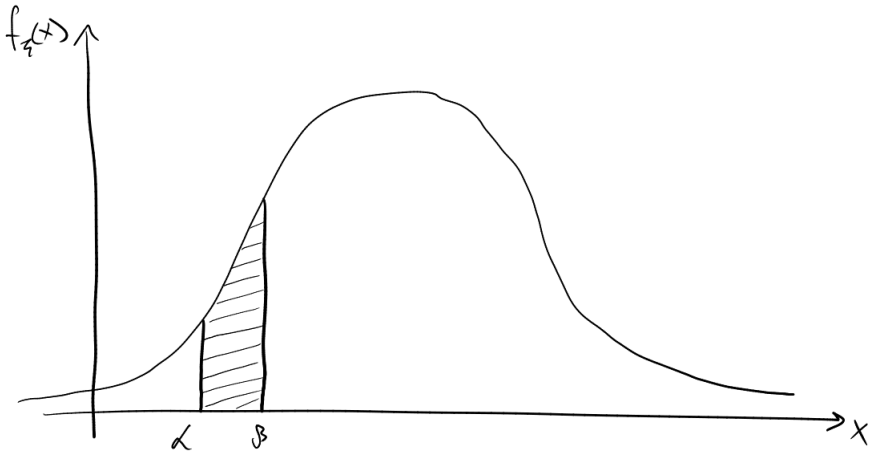
для некоторой функции $f_\xi(x)$. Интеграл Лебега а не Римана.

Определение. $f_\xi(x)$ — **плотность распределения** случайной величины ξ

7.2.1 Свойства плотности и функции распределения

Свойство 1. ***Вероятностный геометрический*** *смысл плотности.*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)dx$$



$$S = p(\alpha < \xi < \beta)$$

Доказательство. Из определения распределения $B = (\alpha, \beta)$ □

Свойство 2. ***Условие нормировки***

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство. По определению $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1$ а $B = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$ Исправить □

Свойство 3.

$$F\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Доказательство. По определению

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad B = (-\infty, x)$$

□

Свойство 4. $F_\xi(x)$ *— непрерывная функция. Как интеграл с переменным верхним пределом*

Свойство 5. *$F_\xi(x)$ — дифференцируема почти всюду и*

$$f_\xi(x) = F'(x)$$

почти для всех x

Доказательство. Теорема Барроу. □

Примечание. Почти для всех, кроме возможно x из множества нулевой меры Лебега.

Свойство 6. $f_\xi(x) > 0$

Доказательство. Из определения или из 5 □

Свойство 7. $p(\xi = x_0) = 0$

Свойство 8. $p(x_1 < / \leq \xi < / \leq x_2) = F(x_2) - f(x_1)$

Свойство 9. *Если для $f(x)$ выполнено свойства 2 и 6 то она является плотностью некоторой случайной величины*

7.2.2 Числовые характеристики

Определение. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

при условии что данный интеграл сходится абсолютно, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$

Определение. Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 f(x)dx$$

при условии что интеграл сходится абсолютно

Примечание.

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E\xi)^2$$

Определение. Среднее квадратичное отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Примечание. Смысл свойств этих числовых характеристик полностью идентичны дискретной случайной величины

Лекция 8

8.1 Стандартное абсолютно непрерывное распределение

8.1.1 Равномерное распределение

Определение. Случайная величина ξ **равномерно** распределена на $[a, b]$ если ее плотность постоянна на этом отрезке

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

Обозначение. $\xi \in U_{[a,b]}$

Примечание. Датчики случайных чисел имеют равномерное распределение, и с их помощью можно смоделировать другие распределения, если знаем их функции распределения

8.1.2 Экспоненциальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **показательное** распределение, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_0^{\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{\infty} \alpha(\alpha x)^k e^{-\alpha x} dx = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$E\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(a < \xi < b) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

Примечание. **Свойство нестарения**. Если $\xi \in E_\alpha$, то $p(\xi > x + y | \xi > x) = p(\xi > y)$

Примечание. Гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda - 1} e^{-t} dt$$

- $$\Gamma(\lambda - 1) = \lambda! \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

Обозначение. $\xi \in E_\alpha$

Пример. Время работы прибора до поломки

Пример. Время между появлениями двух соседних редких событий в простейшем потоке событий

8.1.3 Нормальное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **нормальное** распределение с параметрами $a, \sigma > 0$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Смысл параметров распределения: $a = E\xi$, σ — среднее квадратичное отклонения. $D = \sigma^2$
Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Обозначение. $\xi \in N_{a,\sigma}$

8.1.4 Стандартное нормальное распределение

Определение. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$ т.е. $\xi \in N_{0,1}$. Плотность

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция распределения

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x) \text{ — функция Лапласса}$$

Примечание. Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

8.1.5 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и ее следствия

Свойство 10. *$\xi \in N_{a,\sigma}$. Тогда*

$$F_\xi(x) = \Phi_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Доделать □

Свойство 11. *Если $\xi \in N_{a,\sigma}$, тогда $\eta = \frac{1-a}{\sigma} \in N_{0,1}$*

Доказательство. Доделать □

Свойство 12. *$\xi \in N_{a,\sigma}$. Тогда $E\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$*

Доказательство.

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1} \Rightarrow E\eta = 0,\ D\eta = 1$$

$$\xi = \sigma\eta + a$$

$$E\xi = \sigma \cdot 0 + a = a$$

$$D\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

□

Свойство 13. *Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал*

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right)\right) - \left(0,5 + \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

□

Свойство 14. *Вероятность отклонения случайной величины от ее среднего значения или попадание в интервал симметричный относительно a*

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$P(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

□

Доказательство. При замене в этой формуле $Phi(x)$ на $\Phi_0(x)$ получится

$$p(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$$

□

Свойство 15 (Правило трех σ)**.**

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

8.1.6 Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Определение. Асимметрией распределения называется число

$$A_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^3} \boxed{\text{Исправить}}$$

Определение. Эксцессом распределения называется число

$$E_\xi = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{N_{a,\sigma}}{\sigma^4} - 3 \boxed{\text{Исправить}}$$

Примечание. Если $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, то $A\xi = 0$ и $E\xi = 0$. Таким образом эти коэффициенты показывают насколько сильно данное распределение отличается от нормального

8.1.7 Гамма функция и гамма распределение

Определение. Гамма функцией Гаусса называется функция

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

Свойство 1.

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$$

Свойство 2.

$$\Gamma(1) = 1$$

Свойство 3.

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad x \in \mathbb{N}$$

Свойство 4.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Определение. Случайная величина ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha, \lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases} \boxed{\text{Исправить}}$$

$$F_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt \quad x \geq 0$$

Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{x^k} e^{-\alpha x} \boxed{\text{Исправить}}$$

Обозначение. $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

Свойство 1. $E\xi = \frac{\lambda}{\alpha}$, $D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$

Свойство 2. $\Gamma_{\alpha,\lambda} = E_\alpha$

Свойство 3. $\boxed{\textit{Доделать}}$

Свойство 4. *Если* $\xi \in N_{0,1}$, *то* $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Лекция 9

9.1 Сингулярное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет **сингулярное распределение**, если существует Борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, с нулевой мерой Лебега $\lambda B = 0$, такое что $p(\xi \in B) = 1$, но $\forall x \in B\ p(\xi = x) = 0$

Примечание.

$$\forall x \in B\ p(\xi = x) = 0 \implies p(\xi \in B) = 0$$

Иными словами, при сингулярном распределении, случайная величина распределена на несчетном множестве меры 0

Примечание. Функция распределения — непрерывная функция, по свойству 7 функции распределения.

Пример. Случайная величина ξ, задана функция распределения, которая — лестница Кантора
Доделать

Теорема 9.1.1 (Лебега)**.** Пусть $F_\xi(x)$ — функция распределения произвольной случайной величины ξ
Тогда

$$F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x) \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

, где $F_1(x)$ — функция дискретного распределения, $F_2(x)$ — функция абсолютно непрерывного распределения, $F_3(x)$ — функция сингулярного распределения. Т.е. все распределения делятся на дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные и их смеси

9.2 Общий взгляд на математическое ожидание

Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется интеграл Лебега:

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dp(\omega) \tag{9.1}$$

, при условии, что данный интеграл существует. Использую интеграл Стилтьеса, эту формулу можно записать в виде:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \tag{9.2}$$

Из определения интеграла Стилтьеса можно получить геометрическую интерпретацию математического ожидания

Рассмотрим две ситуации:

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — дискретное вероятностное пространство, т.е. Ω состоит из н.б.ч.с числа точек. Тогда из 9.1 получаем:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) p(\omega_i)$$

Пример. Доделать

2. $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — непрерывное вероятностное пространство. например $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, тогда из 9.2 получаем:

$$E\xi = \iint \cdots \int_{\Omega} \xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) \cdot p(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$

Пример. В круг радиуса 3 наугад бросается точка, случайная величина ξ, расстояния от центра круга до данной точки. Найти мат. ожидание ξ.

$$\Omega = \{(x, y) \Big| x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p(x, y) = p = const$$

Из условия нормировки:

$$\int_{\Omega} \alpha p(\omega) = 1 \text{ или } \iint_{\Omega} p\, dx\, dy = 1 \implies \frac{1}{9\pi}$$

$$E\xi = \iint_{\Omega} \xi(x, y) \cdot p dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{9\pi} dx dy =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 \rho \cdot \rho d\rho = \frac{1}{9\pi} \cdot \pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^3 = 2$$

Исправить

9.3 Преобразование случайных величин

ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда функция $g(\xi)$

Определение. Функция $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — Борелевская функция, если $\forall B \in \mathfrak{B}$, $g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$

Теорема 9.3.1. Если $g(x)$ — Борелевская функция и ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, то $g(\xi)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Доказательство. Доделать □

Примечание. Если ξ — дискретная случайная величина, то ее закон распределения находится просто из определения, поэтому в дальнейшем будем считать, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение

9.3.1 Стандартизация случайной величины

Определение. Пусть имеется случайная величина ξ с соответствующей ей стандартной величиной:

$$\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$$

Свойство 1. $E\eta = 0,\ D\eta = 1$

Доказательство. Доделать □

Примечание. При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется

9.3.2 Линейное преобразование

Теорема 9.3.2. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$
Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b,\ a \neq 0$ имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} \cdot f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Доказательство.

1. $a > 0$, тогда:

$$F_\eta(x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt$$

$$= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} = \int$$

Доделать □

Свойство 1. *Если* $\xi \in N(0,1)$, *то* $\eta = \sigma\xi + a \in N(a, \sigma^{-1})$

Доказательство. Доделать □

Свойство 2. *Если* $\eta \in N(a, \sigma^2)$, *то* $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma} \in N(0,1)$

Свойство 3. *Если* $\eta \in N(a, \sigma^2)$, *то* $\xi = \gamma\eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$

Свойство 4. *Если* $\xi \in U(0,1)$, *то* $\eta = a\xi + b \in U(b, a+b)$ *при* $a > 0$

Свойство 5. *Если* $\xi \in E_\alpha$, *то* $\eta = \alpha\xi \in E_1$

Теорема 9.3.3. Пусть $f_\xi(x)$ — плотность случайной величины ξ и функция (x) — монотонная. Тогда существует обратная $h(t) = g^{-1}(x)$ и случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|h'(x)|} f_\xi(h(x))$$

9.3.3 Квантильное преобразование

Теорема 9.3.4. Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ — непрерывная, тогда случайная величина $\eta = F(\xi) \in U(0,1)$ — имеет стандартное равномерное распределение

Доказательство. Ясно, что $0 \le \eta \le 1$

1. Предположим сначала, что $F(x)$ — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию $F^{-1}(x)$ и

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \eta \in U(0,1)$$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. у нее есть интервалы постоянства, в этом случае через $F^{-1}(x)$ обозначим, самую левую точку такого интервала:

$$F^{-1}(x) = \min_t \{t \Big| F(t) = x)\}$$

— корректно, т.к. $F(x)$ непрерывна слева. Тогда снова будет верна цепочка:

$$F_\eta(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \quad 0 \le x \le 1$$

□

Сформулируем теперь обратную теорему:
Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, при чем не обязательно непрерывная. Обозначим через $F^{-1}(x) = \inf\{t \Big| F(t) \ge x\}$

Теорема 9.3.5. Пусть $\eta \in U(0,1)$, $F(x)$ — произвольная функция распределения.
Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Примечание. $F^{-1}(\eta)$ называется квантильным преобразованием над случайной величиной η

Следствие 9.3.5.2. Датчики случайных чисел обычно имеют стандартное равномерное распределение. Из теоремы следует, что при помощи датчика случайных числе и квантильного преобразования, мы можем смоделировать любое желаемое распределение, в том числе дискретное.

Пример. E_α:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\eta = 1 - e^{-\alpha x} \implies x = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\eta)$$

Если $\eta \in U(0,1)$, то $\xi = \frac{1}{\alpha}\ln(1-\eta) \in E_\alpha$

Пример. $N(0,1)$:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Phi_0^{-1} \in N(0,1)$$

Лекция 10

10.1 Сходимость случайных величин

10.1.1 Сходимость ‘почти наверное‘

Определение. Случайная величина имеет некоторое свойство **почти наверное**, если: p(случайная величина имеет свойство) $= 1$, или p(случайная величина не имеет свойство) $= 0$

Определение. $\{\xi_n\}$ **сходится почти наверное** к случайной величине ξ, при $n \to \infty$, если $p(\omega \in \Omega \big| \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) \to 1$

Обозначение. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$

10.1.2 Сходимость по вероятности

Определение. Последовательность $\{\xi_n\}$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $p(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ или $p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Примечание. $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \not\Longrightarrow E\xi_n \to E\xi$

Свойство 1. $|\xi_n| \leq C = const$ $\forall n$, *тогда* $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \implies E\xi_n \to E\xi$

Свойство 2. *Если* $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ *и* $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$, *то* $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} \xi + \eta$ *и* $\xi_n\eta_n \xrightarrow{p} \xi\eta$

10.1.3 Сходимость по функции распределения

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ **слабо сходится** к случайной величине ξ, если $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$ $\forall x$

Обозначение. $\xi_n \rightrightarrows \xi$

Свойство 1. *Если* $\xi_n \xrightarrow{p} C$ *и* $\eta_n \rightrightarrows \eta$, *то* $\xi_n\eta_n \rightrightarrows C\eta$ *и* $\xi_n + \eta_n \rightrightarrows \eta + C$

10.1.4 Связь между видами сходимости

Теорема 10.1.1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{p} \xi \implies \xi_n \rightrightarrows \xi$

Доказательство. Доделать □

Теорема 10.1.2. Если $\xi \rightrightarrows C$, то $\xi \xrightarrow{p} C$

Доказательство. Доделать □

Примечание. В общем случае бессмысленно утверждение $\xi_n \rightrightarrows \xi \implies \xi_n \xrightarrow{p} \xi$, т.к. совершенно разные случайные величины могут иметь одинаковое распределение

Теорема 10.1.3. Для произвольной Борелевской функции $g(x)$:

1. $Eg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \cdot p(\xi = x_n)$, если ξ — дискретная случайная величина
2. $Eg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx$, если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина

10.2 Свойство моментов

Свойство 1. *Если случайная величина $\xi \geq 0$ почти наверное, то $E\xi \geq 0$*

Доказательство. Доделать □

Свойство 2. *Если $\xi \geq \eta$ почти наверное, то $E\xi \geq E\eta$*

Доказательство. $\xi \geq \eta$ почти наверное $\implies$ $\xi - \eta \geq 0$ почти наверное $\implies$ $E(\xi - \eta) = E\xi - E\eta \geq 0 \implies E\xi \geq E\eta$ почти наверное □

Свойство 3. *Если $|\xi| \geq |\eta|$ почти наверное, то $E|\xi|^k \geq E|\eta|^k$*

Свойство 4. *Если существует момент n_t случайной величины ξ, то существуют и ее моменты меньшего порядка $s < t$*

Доказательство. Доделать □

10.2.1 Ключевые неравенства

Далее ξ — случайная величина, $E|\xi| < \infty$ и $D\xi < \infty$, если оно упоминается в теореме

Теорема 10.2.1 (неравенство Йенсена)**.** Пусть функция выпукла вниз, тогда для любой случайной величины верно неравенство:

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Примечание. Для вогнутых функция знак неравенства меняется

Доказательство. Доделать □

Следствие 10.2.1.3. Если $E|\xi|^t < \infty$, то $\forall s: \ 0 < s < t$

$$\sqrt[s]{E|\xi|^s} \leq \sqrt[t]{E|\xi|^t}$$

Теорема 10.2.2 (неравентво Маркова)**.**

$$p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Теорема 10.2.3 (неравентво Чебышева)**.**

$$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

10.3 Среднее арифметическое случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом. Обозначим $a = E\xi$, $d = D\xi$, $\sigma = \sigma_\xi$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}$$

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \cdots + E\xi_n) = \frac{1}{n}(a + \cdots + a) = a = E\xi$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \cdots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot d = \frac{d}{n} = \frac{D\xi}{n}$$

$$\sigma_{S_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

10.4 Законы больших чисел

10.4.1 Закон больших чисел Чебышева

Теорема 10.4.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными вторым моментом, тогда $\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1$

Примечание. При доказательстве получили полезное неравенство:

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq C\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2}$$

10.4.2 Закон больших чисел Бернулли

Теорема 10.4.2. Пусть N_A — число появления события A в серии из N независимых экспериментов, $p = p(A)$
Тогда $\frac{N_A}{n} \xrightarrow{p} p$

10.4.3 Закон больших чисел Хинчина

Теорема 10.4.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом $E\xi_1 < \infty$
Тогда

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_n$$

10.4.4 Усиленный закон больших чисел Колмогорова

Теорема 10.4.4. В условиях теоремы Хинчина

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_1}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_n$$

10.4.5 Закон больших чисел Маркова

Теорема 10.4.5. Пусть имеется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с конечными вторыми моментами, при чем $D(S_n) = o(n^2)$ Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

или

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + \cdots + E\xi_n}{n} \xrightarrow{p} 0$$

10.5 Центральная предельная теорема

Теорема 10.5.1.

- $\xi_1, \xi_2, \ldots$
- $0 < D\xi_1 < \infty$
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

Тогда

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Примечание. $a = E\xi_1,\ \sigma = \sigma_{\xi_1}$, тогда $\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right)} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Т.е. стандартизованное среднее арифметическое слабо сходится к стандартному нормальному распределению

Лекция 11

11.1 Совместное распределение случайных величин

Определение. Случайным вектором $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве $\Omega, \mathcal{F}, p$. Случайный вектор задает отображение $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Поэтому случайный вектор называют ?? $P()$

Доделать

Лекция 12

Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с плотностью $f(x,y)$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $g(\xi_1, \xi_2)$ — ?

Теорема 12.0.1. Пусть $z \in \mathbb{R}$, $D_z = \{(x,y) \big| g(x,y) < z\}$
<u>Тогда</u> случайная величина $\eta = g(x,y)$ имеет функцию распределения:

$$F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy$$

12.1 Формула свертки

Теорема 12.1.1. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые, абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(x)$
<u>Тогда</u> $\xi_1 + \xi_2$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t-x)\,dx$$

Доказательство. Т.к. случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность совместного распределения равна произведению плотностей: $f_{\xi_1\xi_2}(x,y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$. Применим предыдущую теорему для $\eta = g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$. Тогда $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x + y < z\}$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\,dy =$$

$$\begin{bmatrix} y = t - x & t = y + x & dy = dy \\ y(-\infty) = -\infty & t(z-x) = z & \end{bmatrix} = \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dx}_{f_{\xi_1+\xi_2}(t)}\,dt \implies f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dx$$

□

12.2 Сумма стандартных распределений

Определение. Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределений также будет этого типа, то говорят что это распределение **устойчиво** относительно суммирования

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in B_{n,p}$
- $\xi_2 \in B_{m,p}$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$

Доказательство. $\xi_1 + \xi_2$ — число успехов в серии из $m + n$ испытаний, где p — вероятность успеха при одном испытании. $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$ □

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in \Pi_\lambda$
- $\xi_2 \in \Pi_\mu$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in \Pi_{\lambda+\mu}$

Доказательство.

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi_1 = i, \xi_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p(\xi_1 = i) \cdot p(\xi_2 = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \boxed{\text{Доделать}}$$

□

Пример. $\xi_1, \xi_2 \in N(0, 1)$ — независимые случайные величины
Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in N(0, 2)$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Пример.

- $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$
- $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Пример. $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E_\alpha$ — независимые случайные величины
Тогда $\xi_1 + \cdots + \xi_n \in \Gamma_{\alpha,n}$

Доказательство. По индукции

База $E_\alpha = \Gamma_{\alpha,1}$

Переход Пусть $\xi_1 + \cdots + \xi_{k-1} = \Gamma_{\alpha,k-1}$, тогда:

$$f_{\xi_{k-1}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\alpha^{k-1}}{(x-2)!} x^{k-1} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

По формуле свертки

$$\boxed{\text{Доделать}}$$

□

Пример.

- $\xi_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$
- $\xi_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

Доказательство. Доделать □

Пример. $\xi_1, \xi_2 \in U(0,1)$

12.3 Условное распределение

Определение. Условным распределением случайной величины из системы случайных величин (ξ, η) называется ее распределение найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение

Обозначение. $\xi|\eta = y$ — ξ при условии что η приняла значение y

Определение. *A*: Условным математическим ожиданием $E(\xi|\eta = y)$ называется математическое ожидание случайной величины ξ при соответствующем условном распределении

1. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин
   Доделать
2. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин
   Пусть двумерная абсолютно непрерывная случайная величина (ξ, η) задана плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Тогда плотность условного распределения $\xi|\eta = y$ будет равна:

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

Определение. Функция $f(x|y)$ называется **условной плотностью**
Аналогично $f(y|x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}$

Лемма 2. *Условное математическое ожидание вычисляется по формуле:*

$$E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)\, dx$$

Аналогично

$$E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)\, dy$$

Примечание. При фиксированном значении переменной x $f(y|x)$ будет функцией зависящей только от y, а условное математическое ожидание будет числом. Если считать x переменной, то условное математическое ожидание является функцией зависящей от x и называется функцией регрессией eta на ξ. Т.к. eta — случайная величина, то $E(\xi|\eta)$ можно рассматривать как случайную величину.

Лекция 13

Примечание. Если $\xi = \eta$ почти наверное, т.е. $p(\xi = \eta) = 1$, то ..., что $\xi = \eta$

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — вероятностное пространство
Введем $L_2(\Omega, \mathcal{F}, p) = \{\xi \big| E\xi^2 < \infty\}$

Определение. Скалярным произведением случайных величин $\xi, \eta \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$, называется число

$$\langle \xi, \eta \rangle = E(\xi\eta)$$

Примечание. $\langle \xi, \eta \rangle$ — фиксированная двумерная случайная величина с ... законом распределения $p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij}$, то

$$E\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Примечание. Если $\langle \xi, \eta \rangle$ — обе непрерывно дифф. случайные величины с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то

$$E\xi\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy$$

Примечание. Свойства $\langle \xi, \eta \rangle$

1. $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$
2. $\langle C\xi, \eta \rangle = C \langle \xi, \eta \rangle$
3. $\langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle + \langle \xi_2, \eta \rangle$
4. $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$
5. $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ почти наверное

Т.е. это скалярное произведение

Определение. $\xi = \sqrt{E\xi^2}$ и $\rho(\xi, \eta) = \xi - \eta$, получаем $L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Теорема 13.0.1 (неравенство Коши-Буняковсого-Шварца)**.** Пусть случайные величины ξ, η имеют конечные вторые моменты
<u>Тогда</u>

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

Причем $|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \Leftrightarrow \eta = C\xi$, почти наверное, $C = const$

Доказательство.

$$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = E({}^2\xi^2 - 2x\xi\eta + \eta^2) = x^2 E\xi^2 - 2xE\xi\eta + E\eta^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = (E\xi\eta)^2 - E\xi^2 \cdot E\eta^2 < 0 \Leftrightarrow |E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

□

Следствие 13.0.1.4 (неравенство треугольника).

$$\xi + \eta \leq \xi + \eta$$

Доказательство.

$$\xi + \eta^2 = E(\xi + \eta)^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 \leq$$
$$\leq E\xi^2 + 2\sqrt{E\xi^2} \cdot \sqrt{E\eta^2} = \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = (\xi + \eta)^2 \implies$$
$$\implies \xi + \eta \leq \xi + \eta$$

□

13.1 Условное математическое ожидание (УМО)

Рассмотрим линейное подпространство:

$$L(\eta) = \{g(\eta) \big| Dg(\eta) < \infty\}$$

— множество случайных величин вида $g(\eta), g(x)$ — борелевская функция с конечным вторым моментом
Ясно, что $L(\eta) \subset L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Определение. Условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно случайной величины η — ортогональная проекция ξ на подпространство $L(\eta)$

Обозначение. $\hat{\xi} = E(\xi|\eta)$

Свойство 5.

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Leftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \quad \forall g(\eta) \in L(\eta)$$

Доказательство.

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Leftrightarrow E((\xi - \hat{\xi}) \cdot g(\eta)) = 0 \Leftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$$

□

Свойство 6.

$$\min_{L(\eta)} E(\xi g(\eta))^2 = E(\xi - \hat{\xi})^2$$

Свойство 7.

$$E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2|\eta) = C_1 E(\xi_1|\eta) + C_2 E(\xi_2|\eta)$$

Свойство 8. *Пусть f — ограниченная функция, тогда*

$$E(f(\eta)\cdot\xi|\eta) = f(\eta)\cdot E(\xi|\eta)$$

Доказательство. $g(\eta), f(\eta)$ — ограниченные функции и $Eg(\eta) < \infty$, то

$$h(\eta) = f(\eta)\cdot g(\eta) \in L(\eta)$$

— также имеет конечные второй момент

$$E(f(\eta)\cdot\xi\cdot g(\eta)) = E(f(\eta)\cdot E(\xi|\eta)\cdot g(\eta))?$$

$$E(f(\eta)\cdot\xi\cdot g(\eta)) = E(\xi\cdot h(\eta)) = E(\hat{\xi}\cdot h(\eta)) = E(\hat{\xi}\cdot f(\eta)g(\eta)) =$$
$$= E(f(\eta)\cdot E(\xi|\eta)\cdot g(\eta))$$

□

Свойство 9. *Пусть $f(\eta) \in L(\eta)$, тогда $E(f(\eta)|\eta) = f(\eta)$*

Доказательство. из свойства при $\xi \le 1$ □

Свойство 10. *$E\xi = E(E(\xi|\eta))$ или $E\xi = E\hat{\xi}$*

Доказательство. при $g(\eta) = 1$ □

Свойство 11. *Если случайные величины ξ, η независимы*

$$E(\xi|\eta) = E\xi$$

Доказательство.

$$E(E\xi\cdot g(\eta)) = E\xi\cdot Eg(\eta) = E(\xi\cdot g(\eta))$$

, т.к. $\xi, g(\eta)$ независимы □

Примечание. т.е. ξ и η — независимы, если $(\xi - E\xi) \perp L(\eta)$ и $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Примечание.

$$E(\eta|\eta) = f(\eta)$$

, где $f(g) = E(\xi|\eta = g)$

Доказательство. Доделать □

13.1.1 Числовые характеристики зависимости случайных величин

Определение. Ковариацией $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ называется число

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta))$$

Свойство 1. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$

Свойство 2. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$

Свойство 3. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$

Свойство 4. $\operatorname{cov}(C\xi, \eta) = C \operatorname{cov}(\xi, \eta)$

Свойство 5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta)$

Свойство 6.

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2 \sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Свойство 7.

1. *Если* ξ, η *— независимы, то* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$
2. *Если* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$*, то* ξ, η *— не независимы*

Свойство 8.

1. *Если* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) > 0$*, то зависимость прямая*
2. *Если* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) < 0$*, то зависимость обратная*

Примечание. Т.к. ковариация зависит от .., то по ее величине нельзя судить о силе связи

13.1.2 Коэффициент линейной ковариации

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Свойство 1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$

Свойство 2.

1. *Если* ξ *и* η *независимы, то* $r_{\xi,\eta} = 0$
2. *Если* $r_{\xi,\eta} \neq 0$*, то* ξ, η *не независимы*

Свойство 3. $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

Доказательство. Доделать □

Свойство 4. $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$ *почти наверное*

Доказательство. По неравенству Шварца: $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta - E\eta = C \cdot (\xi - E\xi)$
$\eta = \underbrace{C}_{a}\xi + \underbrace{(E\eta - CE\xi)}_{b}$ □

Свойство 5.

1. *Если* $r_{\xi,\eta} = 1$, *то* $\eta = a\xi + b$ *и* $a > 0$
2. *Если* $r_{\xi,\eta} = -1$, *то* $\eta = a\xi + b$ *и* $a < 0$

Доказательство. Т.к. $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то $\eta = a\xi + b$

Доделать □

Определение. Если коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины ξ, η **коррелированы** друг с другом

- Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то прямая корреляция
- Если $r_{\xi,\eta} < 0$, то обратная корреляция

Примечание. Если $r(\xi_1, \xi_2) > 0$ и $r(\xi_2, \xi_3) > 9 \not\Rightarrow r(\xi_1, \xi_3) > 0$ — нет транзитивности

Пример.

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.1

$$E\xi = 0.8 \quad E\eta = -0.1 \quad \sigma_\xi = 1.47 \quad \sigma_\eta = 0.7$$

$$E_\xi\eta = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j p_{ij} = -1\cdot(-1)\cdot 0.1 + (-1)\cdot 0\cdot 0.2 + (-1)\cdot 1\ cdot 0.1 + 2\cdot(-1)\cdot 0.2 + 2\cdot 0\cdot 0.3 + 2\cdot 1\cdot 0.1 = -0.2$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{-0.2 - 0.8 \cdot (-0.1)}{1.47 \cdot 0.7} \approx -0.12$$

Лекция 14

14.1 Комплексная случайная величина

$$\xi + i\eta$$
$$E(\xi + i\eta) = E\xi + iE\eta$$

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} \quad t \in \mathbb{R}$$

Свойство 1. *Характеристическая функция существует для любой случайной величины, при чем*

$$|\varphi_\xi(t)| \leq 1$$

Доказательство.

$$D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 \geq 0 \implies (E\eta)^2 \leq E\eta^2$$
$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |Ee^{it\xi}|^2 = |E\cos t\xi + iE\sin t\xi|^2 = (E\cos t\xi)^2 + (E\sin t\xi)^2 \leq$$
$$\leq E\cos^2 t\xi + E\sin^2 t\xi = E(\cos^2 t\xi + \sin^2 t\xi) = E1 = 1$$

□

Свойство 2. *Пусть $\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда характеристическая функция случайной величины $\eta = a + b\xi$:*

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

Доказательство.

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = Ee^{ita} \cdot e^{itb\xi} = e^{ita} \cdot Ee^{i(tb)\xi} = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

□

Свойство 3. *Пусть случайная величины ξ и η независимы, тогда*

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Доказательство.

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

□

Свойство 4. *Пусть существует k-тый момент случайной величины ξ, тогда характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ непрерывно дифференцируема k раз и*

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot E\xi^k$$

Доказательство. Доказательство существования непрерывности опустим

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} E e^{it\xi}\right) = E\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{it\xi}\right) = E(i^k \xi^k e^{it\xi}) \underset{t=0}{=\!=} E(i^k \xi^k e^0) = i^k \cdot E\xi^k$$

□

Свойство 5. *Пусть $E|\xi|^k < \infty$. Тогда*

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}E\xi^2 + o(|t|^k)$$

Доказательство. По формуле Тейлора в точке $t = 0$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \frac{\varphi'_\xi(0)}{1!}t + \frac{\varphi''_\xi(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi_\xi^{(k)}}{k!}t^k + o(|t|^2) =$$

$$= \varphi_\xi(0) + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}E\xi^k + o(|t|^2)$$

□

Свойство 6. *Распределение случайной величины восстанавливается по характеристической функции, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. В частности если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то плотность:*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \varphi_\xi(t)\, dt$$

Теорема 14.1.1 (о непрерывном соответсвии)**.** Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ, тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций поточечно сходится к характеристической функции $\varphi_\xi(t)$

$$\xi_n \rightrightarrows \xi \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$$

14.1.1 Характеристические функции стандартных распределений

1. Распределение Бернулли $\xi \in B_p$

ξ	0	1
η	$1-p$	p

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it\cdot 0}p(\xi = 0) + e^{it1} \cdot p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

2. Биномиальное распределение $\xi \in B_{n,p}$ — число успехов при n независимых испытаниях
$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$$
, где $\xi_i = B_p$ — число успехов при одном испытании
$$\varphi_\xi(t) = (1 - p + e^{it})^n$$

3. Распределение Пуассона $\xi \in \Pi_\lambda$
$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \quad \boxed{\text{Исправить}}$$

Свойство 1. *Если $\xi \in \Pi_\lambda$, $\eta \in \Pi_\mu$ — независимые случайные величины, то $\xi + \eta = \Pi_{\lambda+\mu}$*

Доказательство.
$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t) = \exp(\lambda(it - 1)) \cot \exp(\mu(it - 1)) = \exp((\lambda + \mu)(it - 1))$$
По свойству 6 □

4. Гамма распределение $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$
$$f_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} \quad x > 0$$
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \boxed{\text{Доделать}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - it}\right)^\lambda$$

5. Экспоненциальное распределение $\xi \in E_\alpha = \Gamma_{\alpha,\lambda}$
$$\varphi_\xi(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}$$
Следствие 14.1.1.5. Пусть $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$, $\eta \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$ — независимые случайные величины
<u>Тогда</u> $\xi + \eta \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

6. Стандартное нормальное распределение $\xi \in N_{0,1}$
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\varphi_\xi(t) = \boxed{\text{Доделать}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

7. Нормальное распределение $\xi \in N_{a,\sigma^2}$
$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1) \quad \xi = a + \sigma\eta$$
$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{a+\sigma\eta}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\eta(\sigma t) = e^{ita} \cdot e^{-\frac{()^2}{2}}$$
Следствие 14.1.1.6. $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ — независимые случайные величины
<u>Тогда</u>
$$\xi + \eta N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

14.1.2 Доказательство основных теорем

Лемма 3.

$$\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

Теорема 14.1.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом a.
Тогда

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} a$$

Теорема 14.1.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. $a = E\xi_1$, $\sigma^2 = D\xi_1$.
Тогда

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

Доказательство. Доделать □

14.1.3 Предельная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 14.1.4.

- $\nu_n(A)$ — число появления события A при n испытаниях
- p — вероятность одного испытания
- $q = 1 - p$

Тогда

$$\frac{\nu_n(A) - np}{\sqrt{npq}} \rightrightarrows N_{0,1}$$

[формула Муавра-Лапласа]

$$p(x_1 \le \nu_n \le x_2) = p\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \underbrace{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}}_{\eta} \le \frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= F_\eta\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \cdot F_\eta\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_0\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \cdot \Phi_0\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Примечание. Аналогичным образом ЦПТ(центральная предельная теорема) применяется при приближенных оценках вероятностей связанных с суммами большого числа независимых случайных величин. Какова погрешность?

Теорема 14.1.5. В условиях ЦПТ, ?? с конечным третьим моментом

$$\left|p\left(\frac{S_n - E\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}}\right) - \Phi_0(x)\right| \le C\frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^2}{\sqrt{n}(\sqrt{D\xi_1})^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Примечание. Можно взять $C = 0.4$