Лекция 9

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1	1 Сингулярное распределение	Ī	1
2	2 Общий взгляд на математическое ожидание	1	1
3	3 Преобразование случайных величин	2	2
	3.1 Стандартизация случайной величины		2
	3.2 Линейное преобразование		17.7
	3.3. Квантильное преобразование		q

1 Сингулярное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет сингулярное распределение, если существует Борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, с нулевой мерой Лебега $\lambda B = 0$, такое что $p(\xi \in B) = 1$, но $\forall x \in B \ p(\xi = x) = 0$

Примечание.

$$\forall x \in B \ p(\xi = x) = 0 \implies p(\xi \in B) = 0$$

Иными словами, при сингулярном распределении, случайная величина распределена на несчетном множестве меры 0

Примечание. Функция распределения — непрерывная функция, по свойству 7 функции распределения.

Пример. Случайная величина ξ , задана функция распределения, которая — лестница Кантора Доделать

Теорема 1.1 (Лебега). Пусть $F_{\xi}(x)$ — функция распределения произвольной случайной величины ξ Тогда

$$F_{\xi}(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$$
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

, где $F_1(x)$ — функция дискретного распределения, $F_2(x)$ — функция абсолютно непрерывного распределения, $F_3(x)$ — функция сингулярного распределения. Т.е. все распределения делятся на дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные и их смеси

2 Общий взгляд на математическое ожидание

Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, p) . Математическим ожиданием случайной величины ξ называется интеграл Лебега:

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dp(\omega) \tag{1}$$

, при условии, что данный интеграл существует. Использую интеграл Стилтьеса, эту формулу можно записать в виде:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \tag{2}$$

Из определения интеграла Стилтьеса можно получить геометрическую интерпретацию математического ожидания

Рассмотрим две ситуации:

1. Вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, p) — дискретное вероятностное пространство, т.е. Ω состоит из н.б.ч.с числа точек. Тогда из 1 получаем:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) p(\omega_i)$$

Пример. Доделать

2. (Ω, \mathcal{F}, p) — непрерывное вероятностное пространство. например $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, тогда из 2 получаем:

$$E\xi = \iint \cdots \int_{\Omega} \xi(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

Пример. В круг радиуса 3 наугад бросается точка, случайная величина ξ , расстояния от центра круга до данной точки. Найти мат. ожидание ξ .

$$\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 9\}$$
$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$p(x,y) = p = const$$

Из условия нормировки:

$$\int_{\Omega} \alpha p(\omega) = 1 \text{ или } \iint_{\Omega} p \, dx \, dy = 1 \implies \frac{1}{9\pi}$$

$$E\xi = \iint_{\Omega} \xi(x,y) \cdot p dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{9\pi} dx dy =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{3} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{1}{9\pi} \cdot \pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \bigg|_{0}^{3} = 2$$

Исправить

3 Преобразование случайных величин

 ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, p), g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда функция $g(\xi)$

Определение. Функция $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — Борелевская функция, если $\forall B\in\mathfrak{B},\,g^{-1}(B)\in\mathfrak{B}$

Теорема 3.1. Если g(x) — Борелевская функция и ξ — случайная величина на (Ω, \mathcal{F}, p) , то $g(\xi)$ — случайная величина на (Ω, \mathcal{F}, p)

Доказательство. Доделать

Примечание. Если ξ — дискретная случайная величина, то ее закон распределения находится просто из определения, поэтому в дальнейшем будем считать, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение

3.1 Стандартизация случайной величины

Определение. Пусть имеется случайная величина ξ с соответствующей ей стандартной величиной:

$$\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$$

Свойство 1. $E\eta = 0, \, D\eta = 1$

Доказательство. Доделать

Примечание. При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется

3.2 Линейное преобразование

Теорема 3.2. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_{\xi}(x)$ Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b, \ a \neq 0$ имеет плотность:

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{|a|} \cdot f_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Доказательство.

1. a > 0, тогда:

$$\begin{split} F_{\eta}(x) &= p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x - b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x - b}{a}} f_{\xi}(t)dt \\ &= \begin{bmatrix} t = \frac{y - b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(-\infty) &= -\infty & y\left(\frac{x - b}{a}\right) = x \end{bmatrix} \end{split}$$

Доделать

Свойство 1. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = \sigma \xi + a \in N(a,\sigma^{-1})$

Доказательство. Доделать

Свойство 2. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

Свойство 3. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \gamma \eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2 \sigma^2)$

Свойство 4. Если $\xi \in U(0,1)$, то $\eta = a\xi + b \in U(b,a+b)$ при a > 0

Свойство 5. Если $\xi \in E_{\alpha}$, то $\eta = \alpha \xi \in E_1$

Теорема 3.3. Пусть $f_{\xi}(x)$ — плотность случайной величины ξ и функция (x) — монотонная. Тогда существует обратная $h(t) = g^{-1}(x)$ и случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность:

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{|h'(x)|} f_{\xi}(h(x))$$

3.3 Квантильное преобразование

Теорема 3.4. Пусть функция распределения F(x) случайной величины ξ — непрерывная, тогда случайная величина $\eta = F(\xi) \in U(0,1)$ — имеет стандартное равномерное распределение

Доказательство. Ясно, что $0 \le \eta \le 1$

1. Предположим сначала, что F(x) — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию $F^{-1}(x)$ и

$$F_{\eta}(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

 $\implies \eta \in U(0,1)$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. у нее есть интервалы постоянства, в этом случае через $F^{-1}(x)$ обозначим, самую левую точку такого интервала:

$$F^{-1}(x) = \min_{t} \{t | F(t) = x\}$$

— корректно, т.к. F(x) непрерывна слева. Тогда снова будет верна цепочка:

$$F_n(x) = p(F(\xi) < x) = p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \quad 0 \le x \le 1$$

Сформулируем теперь обратную теорему:

Пусть F(x) — функция распределения случайной величины ξ , при чем не обязательно непрерывная. Обозначим через $F^{-1}(x)=\inf\{t\Big|F(t)\geq x\}$

Теорема 3.5. Пусть $\eta \in U(0,1), \, F(x)$ — произвольная функция распределения. <u>Тогда</u> случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения F(x)

 $\mathit{Примечание}.\ F^{-1}(\eta)$ называется квантильным преобразованием над случайной величиной η

Следствие 3.5.1. Датчики случайных чисел обычно имеют стандартное равномерное распределение. Из теоремы следует, что при помощи датчика случайных числе и квантильного преобразования, мы можем смоделировать любое желаемое распределение, в том числе дискретное.

Пример. E_{α} :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & x \ge 0 \end{cases}$$
$$\eta = 1 - e^{-\alpha x} \implies x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$$

Если $\eta \in U(0,1)$, то $\xi = \frac{1}{\alpha} \ln(1-\eta) \in E_{\alpha}$

 Π ример. N(0,1):

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\Phi_0^{-1} \in N(0, 1)$$