# Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

**1 Случайные величины** **1**
1.1 Смысл измеримости . . . . . 2
1.2 Типы распределения . . . . . 2
1.2.1 Дискретные . . . . . 2

## 1 Случайные величины

**Обозначение.** $\xi$ — **Случайная величина**

*Пример.* $\xi$ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*Пример.* $\xi$ — время работы микросхемы до отказа

1. Время работы в часах
   $\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. Время работы измеряем точно
   $\xi \in [0, +\infty]$

*Пример.* $\xi$ — температура воздуха в случайный момент времени. $\xi \in (-50°, 50°)$

*Пример.* Индикатор события $A$.

$$I_A(\omega) \in \begin{cases} 0 & ,\omega \notin A \\ 1 & ,\omega \in A \end{cases}$$

**Определение.** Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **$\mathcal{F}$-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R} :\ \{\omega | \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Т.е прообраз $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$

**Определение. Случайной величиной** $\xi$ заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ называется $\mathcal{F}$-измеримая функция Исправить, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega$ некоторое вещественное число

*Пример.* Бросаем кость.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $]\xi(i) = i$

Если $x = 4$, то $\{\omega | \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Rightarrow \xi$ не является $\mathcal{F}$-измеримой

## 1.1 Смысл измеримости

Пусть случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая. Тогда $P(\xi < x) = P(\{\omega|\xi(\omega) < x\})$, т.к. $A_x = \{\omega|\xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\overline{A_x} = \{\omega|\xi(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$$

$$A_x \setminus B_y = \{\omega|t \leq \xi(\omega) lex\} \in \mathcal{F}$$

$$B_x = \boxed{\text{Доделать}}$$

$$B_x \setminus A_x = \{\omega|\xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда видим, по теореме Каво? Исправить можно однозначно продолжить до любого Борелевского множества на прямой. $B \in \mathcal{B}$ — Борелевская $\sigma$-алгебра. $P(B \in \mathcal{B}) = P\{\omega|\xi(\omega) \in B\}$
Пусть случайная величина задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, p) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, p)$ — новое вероятностное пространство
2. $\xi^{-1}(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$
   $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$
   $\mathcal{F}_\xi$ — $\sigma$-алгебра порожденная величиной $\xi$

**Задача 1.** Найти $\sigma$-алгебру порожденную индикатором

**Определение.** Функция $P(B)$ $B \in \mathcal{B}$ называется **распределением вероятностей** случайной величины $\xi(\omega)$. Т.е. распределение случайной величины это соответствие множествами на вещественной прямой и вероятностями случайной величины попасть в это множество

## 1.2 Типы распределения

- Дискретные
- Абсолютно непрерывные
- Смешанные
- Сингулярные (непрерывные но не абсолютно непрерывные)

### 1.2.1 Дискретные

Случайная величина $\xi$ имеет дискретное распределение, если она принимает не более чем счетное число значений, т.е. существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, такой что

1. $p_i = p(\xi = x_i) > 0$
2. $\sum\limits_i p_i = 1$

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ |

Доделать

*Пример.* Кость

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Доделать

1. Основные числовые характеристики
   (a) Математическое ожидание(среднее значение) **Математическим ожиданием** случайной величины $\xi$ называется число:

   $$E\xi = \sum_i x_i p_i$$

   при условии что данный ряд сходится абсолютно, иначе говорят что математическое ожидание не существует

**Обозначение.** $E\xi$

*Примечание.* Смысл: среднее значение, число вокруг которого группируется значения случайной величины. Физический смысл: центр масс. Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений при большом значении реальных экспериментов

(b) Дисперсия

**Определение. Дисперсией** $D\xi$ случайной величины $\xi$ называется среднее квадратов отклонений ее от математического ожидания

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

или

$$D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i$$

При условии что данное среднее значение существует(конечно)

*Примечание.* Вычислять дисперсию удобнее по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (E\xi)^2$$

*Примечание.* Смысл: квадрат среднего разброса(рассеяния) случайной величины около ее математического ожидания

(c) Среднее квадратичное отклонение

**Определение. Средним квадратичным отклонением** ($\sigma_\xi = \sigma(\xi)$) случайной величины $\xi$ называется число

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

*Примечание.* Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около ее математического ожидания

*Пример.* Бросаем кость

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$D\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = 2.92$$

$$\sigma = \sqrt{2.92} \approx 1 \neq 1$$

2. Свойства математического ожидания и дисперсии

**Определение.** Случайная величина $\xi$ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = C = const$ $\forall \omega \in \Omega$ или $p(\xi = C) = 1$

$$E\xi = C = const$$

$$D\xi = 0$$

*Доказательство.* Доделать □

**Определение** (Свойство сдвига)**.**

$$E(\xi + C) + E\xi + C$$

$$D(\xi + C) = D\xi$$

*Доказательство.* Доделать □

**Определение.**

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

*Доказательство.* Доделать □

**Определение.**

$$E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$$

*Доказательство.*

- Пусть $x_i, y_i$ — соответствующие значения случайных величин $xi$ и $mu$

$$E(\xi+\eta) = \sum_{i,j}(x_i+y_j)p(\xi=x_i,\eta=y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi=x_i,\eta=y_j) + \sum_j y_j \sum p(\xi=x_i,\eta=y_j)$$

Доделать □

**Определение.** Дискретные случайные величины **независимы** если $\forall i,j\ p(\xi=x_i,\eta=y_j) = p(\xi=x_i)\cdot p(\eta=y_j)$

*Примечание.* Если $xi$ и $\eta$ независимы, то

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

обратное не верно

*Доказательство.*

$$E(\xi\eta) = \sum_{ij}(x_iy_j)p(\xi=x_i,\eta=y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j(\xi=x_i,\eta=y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi=x_j)p(\eta=y_j) = \sum_i x_i p(\xi=x_i)\cdot \sum_j y_j p(\eta=y_j) = E\xi\cdot E\eta$$

□

*Доказательство.*

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$D\xi = E(\xi-E\xi)^2 = E(\xi - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E(E\xi)^2 =$$

$$E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

*Примечание.*

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{Cov}(\xi, eta)$$

, где $\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E\xi\cdot E\eta$ — **ковариация**

*Доказательство.*

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 - (E\xi)^2 - 2E\xi\cdot E\eta - (E\eta)^2 =$$

$$D\xi + D\eta + 2(E(\xi\eta) - E\xi\cdot E\eta)$$

□

*Примечание.* Если случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимые, то

$$D(\xi+\eta) = D\xi + \eta$$

*Доказательство.* По свойству $\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = 0$ □

*Примечание.* Среднее квадратичное отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой, т.е.

$$D\xi = \min_a (y-a)$$ Исправить

*Доказательство.*

$$E(\xi - a)^2 = E((\xi - E\xi) + (E\xi - a))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + \underbrace{2E(\xi - E\xi) \cdot (E\xi - a)}_{0} + (E\xi - a)^2 =$$

$$= D\xi + (E\xi - a)^2 \leq D\xi$$

□

3. Другие числовые характеристики

*Примечание.*

$$m_k = E\xi^k$$

— момент $k$-того порядка
В частности $m_1 = E\xi$

*Примечание.*

$$E|\xi|^k$$

— абсолютный момент $k$-того порядка

*Примечание.*

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$$

— центральный момент $k$-того порядка
В частности $\mu_2 = D\xi$

*Примечание.*

$$E|\xi - E\xi|^2$$

— абсолютный центральный момент $k$-того порядка

*Примечание.* Центральные моменты можно выразить через относительные моменты Доделать

*Примечание.* **Модой** Mo называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей

$$p(\xi = \mathrm{Mo}) = \max_i p_i$$

**Определение. Медианой** Me называется значение случайной величины такое что,

$$p(\xi < \mathrm{Me}) = p(\xi > \mathrm{Me}) = \frac{1}{2}$$