Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Условное математическое ожидание (УМО) **2**
1.1 Числовые характеристики зависимости случайных величин 3
1.2 Коэффициент линейной ковариации 3

Примечание. Если $\xi = \eta$ почти наверное, т.е. $p(\xi = \eta) = 1$, то ..., что $\xi = \eta$

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — вероятностное пространство
Введем $L_2(\Omega, \mathcal{F}, p) = \{\xi \big| E\xi^2 < \infty\}$

Определение. Скалярным произведением случайных величин $\xi, \eta \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$, называется число

$$\langle \xi, \eta \rangle = E(\xi\eta)$$

Примечание. $\langle \xi, \eta \rangle$ — фиксированная двумерная случайная величина с ... законом распределения $p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij}$, то

$$E\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Примечание. Если $\langle \xi, \eta \rangle$ — обе непрерывно дифф. случайные величины с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то

$$E\xi\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy$$

Примечание. Свойства $\langle \xi, \eta \rangle$

1. $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$
2. $\langle C\xi, \eta \rangle = C \langle \xi, \eta \rangle$
3. $\langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle + \langle \xi_2, \eta \rangle$
4. $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$
5. $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ почти наверное

Т.е. это скалярное произведение

Определение. $\xi = \sqrt{E\xi^2}$ и $\rho(\xi, \eta) = \xi - \eta$, получаем $L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Теорема 0.1 (неравенство Коши-Буняковсого-Шварца)**.** Пусть случайные величины ξ, η имеют конечные вторые моменты
<u>Тогда</u>

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

Причем $|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \Leftrightarrow \eta = C\xi$, почти наверное, $C = const$

Доказательство.

$$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = E(^2\xi^2 - 2x\xi\eta + \eta^2) = x^2 E\xi^2 - 2xE\xi\eta + E\eta^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = (E\xi\eta)^2 - E\xi^2 \cdot E\eta^2 < 0 \Leftrightarrow |E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

□

Следствие 0.1.1 (неравенство треугольника).

$$\xi + \eta \leq \xi + \eta$$

Доказательство.

$$\xi + \eta^2 = E(\xi + \eta)^2 = E\xi^2 + 2E\xi\eta + E\eta^2 \leq$$
$$\leq E\xi^2 + 2\sqrt{E\xi^2} \cdot \sqrt{E\eta^2} = \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = (\xi + \eta)^2 \implies$$
$$\implies \xi + \eta \leq \xi + \eta$$

□

1 Условное математическое ожидание (УМО)

Рассмотрим линейное подпространство:

$$L(\eta) = \{g(\eta) \big| Dg(\eta) < \infty\}$$

— множество случайных величин вида $g(\eta), g(x)$ — борелевская функция с конечным вторым моментом
Ясно, что $L(\eta) \subset L_2(\Omega, \mathcal{F}, p)$

Определение. Условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно случайной величины η — ортогональная проекция ξ на подпространство $L(\eta)$

Обозначение. $\hat{\xi} = E(\xi|\eta)$

Свойство 1.

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Leftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \quad \forall g(\eta) \in L(\eta)$$

Доказательство.

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Leftrightarrow E((\xi - \hat{\xi}) \cdot g(\eta)) = 0 \Leftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$$

□

Свойство 2.

$$\min_{L(\eta)} E(\xi g(\eta))^2 = E(\xi - \hat{\xi})^2$$

Свойство 3.

$$E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2|\eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$$

Свойство 4. *Пусть f — ограниченная функция, тогда*

$$E(f(\eta) \cdot \xi|\eta) = f(\eta) \cdot E(\xi|\eta)$$

Доказательство. $g(\eta), f(\eta)$ — ограниченные функции и $Eg(\eta) < \infty$, то

$$h(\eta) = f(\eta) \cdot g(\eta) \in L(\eta)$$

— также имеет конечные второй момент

$$E(f(\eta) \cdot \xi \cdot g(\eta)) = E(f(\eta) \cdot E(\xi|\eta) \cdot g(\eta))?$$

$$E(f(\eta) \cdot \xi \cdot g(\eta)) = E(\xi \cdot h(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot h(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot f(\eta)g(\eta)) =$$
$$= E(f(\eta) \cdot E(\xi|\eta) \cdot g(\eta))$$

□

Свойство 5. *Пусть $f(\eta) \in L(\eta)$, тогда $E(f(\eta)|\eta) = f(\eta)$*

Доказательство. из свойства при $\xi \leq 1$ □

Свойство 6. *$E\xi = E(E(\xi|\eta))$ или $E\xi = E\hat{\xi}$*

Доказательство. при $g(\eta) = 1$ □

Свойство 7. *Если случайные величины ξ, η независимы*

$$E(\xi|\eta) = E\xi$$

Доказательство.

$$E(E\xi \cdot g(\eta)) = E\xi \cdot Eg(\eta) = E(\xi \cdot g(\eta))$$

, т.к. $\xi, g(\eta)$ независимы □

Примечание. т.е. ξ и η — независимы, если $(\xi - E\xi) \perp L(\eta)$ и $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Примечание.

$$E(\eta|\eta) = f(\eta)$$

, где $f(g) = E(\xi|\eta = g)$

Доказательство. Доделать □

1.1 Числовые характеристики зависимости случайных величин

Определение. Ковариацией $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ называется число

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta))$$

Свойство 1. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$

Свойство 2. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$

Свойство 3. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$

Свойство 4. $\operatorname{cov}(C\xi, \eta) = C \operatorname{cov}(\xi, \eta)$

Свойство 5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$

Свойство 6.

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Свойство 7.

1. *Если ξ, η — независимы, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$*
2. *Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, то ξ, η — не независимы*

Свойство 8.

1. *Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) > 0$, то зависимость прямая*
2. *Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) < 0$, то зависимость обратная*

Примечание. Т.к. ковариация зависит от .., то по ее величине нельзя судить о силе связи

1.2 Коэффициент линейной ковариации

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Свойство 1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$

Свойство 2.

1. *Если ξ и η независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$*
2. *Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ, η не независимы*

Свойство 3. $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

Доказательство. Доделать □

Свойство 4. $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$ *почти наверное*

Доказательство. По неравенству Шварца: $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta - E\eta = C \cdot (\xi - E\xi)$
$\eta = \underbrace{C}_{a}\xi + \underbrace{(E\eta - CE\xi)}_{b}$ □

Свойство 5.

1. *Если* $r_{\xi,\eta} = 1$, *то* $\eta = a\xi + b$ *и* $a > 0$
2. *Если* $r_{\xi,\eta} = -1$, *то* $\eta = a\xi + b$ *и* $a < 0$

Доказательство. Т.к. $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то $\eta = a\xi + b$
Доделать □

Определение. Если коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины ξ, η **коррелированы** друг с другом

- Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то прямая корреляция
- Если $r_{\xi,\eta} < 0$, то обратная корреляция

Примечание. Если $r(\xi_1, \xi_2) > 0$ и $r(\xi_2, \xi_3) > 9 \not\Rightarrow r(\xi_1, \xi_3) > 0$ — нет транзитивности

Пример.

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.1

$$E\xi = 0.8 \quad E\eta = -0.1 \quad \sigma_\xi = 1.47 \quad \sigma_\eta = 0.7$$

$$E_\xi\eta = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j p_{ij} = -1\cdot(-1)\cdot 0.1 + (-1)\cdot 0\cdot 0.2 + (-1)\cdot 1\ cdot 0.1 + 2\cdot(-1)\cdot 0.2 + 2\cdot 0\cdot 0.3 + 2\cdot 1\cdot 0.1 = -0.2$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{-0.2 - 0.8\cdot(-0.1)}{1.47 \cdot 0.7} \approx -0.12$$