Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Формула свертки **1**

2 Сумма стандартных распределений **1**

3 Условное распределение **3**

Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с плотностью $f(x,y)$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $g(\xi_1, \xi_2)$ — ?

Теорема 0.1. Пусть $z \in \mathbb{R}$, $D_z = \{(x,y) \big| g(x,y) < z\}$
Тогда случайная величина $\eta = g(x,y)$ имеет функцию распределения:

$$F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy$$

1 Формула свертки

Теорема 1.1. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые, абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(x)$
Тогда $\xi_1 + \xi_2$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t-x)\,dx$$

Доказательство. Т.к. случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность совместного распределения равна произведению плотностей: $f_{\xi_1\xi_2}(x,y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$. Применим предыдущую теорему для $\eta = g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$. Тогда $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x + y < z\}$

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\,dy =$$

$$\begin{bmatrix} y = t - x & t = y + x & dy = dy \\ y(-\infty) = -\infty & t(z-x) = z & \end{bmatrix} = \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dx}_{f_{\xi_1+\xi_2}(t)}\,dt \implies f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t-x)\,dx$$

□

2 Сумма стандартных распределений

Определение. Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределений также будет этого типа, то говорят что это распределение **устойчиво** относительно суммирования

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in B_{n,p}$
- $\xi_2 \in B_{m,p}$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$

Доказательство. $\xi_1 + \xi_2$ — число успехов в серии из $m+n$ испытаний, где p — вероятность успеха при одном испытании. $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$ □

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in \Pi_\lambda$
- $\xi_2 \in \Pi_\mu$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in \Pi_{\lambda+\mu}$

Доказательство.

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi_1 = i, \xi_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p(\xi_1 = i) \cdot p(\xi_2 = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \boxed{\text{Доделать}}$$

□

Пример. $\xi_1, \xi_2 \in N(0,1)$ — независимые случайные величины
Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in N(0,2)$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Пример.

- $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$
- $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Пример. $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E_\alpha$ — независимые случайные величины
Тогда $\xi_1 + \cdots + \xi_n \in \Gamma_{\alpha,n}$

Доказательство. По индукции

<u>База</u> $E_\alpha = \Gamma_{\alpha,1}$

<u>Переход</u> Пусть $\xi_1 + \cdots + \xi_{k-1} = \Gamma_{\alpha,k-1}$, тогда:

$$f_{\xi_{k-1}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\alpha^{k-1}}{(x-2)!} x^{k-1} e^{-\alpha x} & x \ge 0 \end{cases}$$

По формуле свертки

$$\boxed{\text{Доделать}}$$

□

Пример.

- $\xi_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$
- $\xi_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

Доказательство. $\boxed{\text{Доделать}}$ □

Пример. $\xi_1, \xi_2 \in U(0,1)$

3 Условное распределение

Определение. Условным распределением случайной величины из системы случайных величин (ξ, η) называется ее распределение найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение

Обозначение. $\xi|\eta = y$ — ξ при условии что η приняла значение y

Определение. A: Условным математическим ожиданием $E(\xi|\eta = y)$ называется математическое ожидание случайной величины ξ при соответствующем условном распределении

1. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин
   Доделать
2. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин
   Пусть двумерная абсолютно непрерывная случайная величина (ξ, η) задана плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Тогда плотность условного распределения $\xi|\eta = y$ будет равна:

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

Определение. Функция $f(x|y)$ называется **условной плотностью**
Аналогично $f(y|x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}$

Лемма 1. *Условное математическое ожидание вычисляется по формуле:*

$$E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)\, dx$$

Аналогично

$$E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)\, dy$$

Примечание. При фиксированном значении переменной x $f(y|x)$ будет функцией зависящей только от y, а условное математическое ожидание будет числом. Если считать x переменной, то условное математическое ожидание является функцией зависящей от x и называется функцией регрессией eta на ξ. Т.к. eta — случайная величина, то $E(\xi|\eta)$ можно рассматривать как случайную величину.