

# Экзамен. Вариант 4

Илья Ярошевский М3237

21 ноября 2024 г.

1. Показать, что отношение длин интервалов неопределенности метода золотого сечения к методу Фибоначчи составляет  $\approx 1.1708$ .

**Ответ:** Рассмотрим длину отрезка на  $n$ -той итерации

- Метод Фибоначчи

$$\Delta_F^n = \frac{1}{F_{n+2}} \cdot (b_0 - a_0)$$

- Метод золотого сечения

$$\Delta_G^n = \tau^n (b_0 - a_0) \quad \tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_G^n}{\Delta_F^n} &= \tau^n \cdot F_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \cdot \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{n+2} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4\sqrt{5}} \approx 1.1708 \end{aligned}$$

2. Сформулировать условие Липшица для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Ответ:**  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица, если

$$\exists L \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

3. Увеличение используемого значения константы Липшица  $L$  при реализации метода ломаных приводит к замедлению сходимости метода. Объяснить этот факт с помощью геометрической иллюстрации.

**Ответ:** Шаг в методе ломаных определяется как:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2L} f(x_k^* - p_1^*)$$

4. Сравните методы Ньютона (одномерная минимизация) и секущих. Каков порядок сходимости каждого?

**Ответ:** Преимущества и недостатки методов Ньютона по сравнению с методом секущих:

+ высокая скорость сходимости

–  $p = -\frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$  определено только тогда, когда  $f''(x^k) \neq 0$

– требуется вычислять  $f''(x)$

Метод Ньютона имеет квадратичный порядок сходимости. Порядок сходимости метода секущих сравнителен с порядком сходимости метода золотого сечения, т.е. быстрее чем линейный, но не квадратичный.

5. Для функции  $f(x) = 99x_1^2 + 196x_1x_2 + 99x_2^2 - 95x_1 - 9x_2 + 91$  выпишите квадратичную форму, линейную и постоянную часть.

**Ответ:**

$$f(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x^2 + (b_1 \ b_2)x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} x + (b_1 \ b_2)x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} x + (b_1 \ b_2)x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \frac{1}{2}a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

$$\frac{1}{2}a_{11} = 99 \implies a_{11} = 198$$

$$a_{12} = a_{21} = 196$$

$$\frac{1}{2}a_{22} = 99 \implies a_{22} = 198$$

$$b_1 = -95 \quad b_2 = -9 \quad c = 91$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 198 & 196 \\ 196 & 198 \end{pmatrix} x^2 + (-95 \ -9)x + 91$$

6. По какому принципу задается направление шага в методе наискорейшего спуска? Как вычисляется величина шага в методе наискорейшего спуска?

**Ответ:** В наискорейшем спуске направление задается антиградиентом функции  $p^k = -\nabla f(x^k)$ . Величина шага находится с помощью решения задачи одномерной оптимизации функции  $\varphi_k(\alpha) = f(x^{k-1} + \alpha_k p^k)$ . В таком случае это будет точка касания линии уровня.

7. Можно ли в методе наискорейшего спуска для квадратичной функции определить величину исчерпывающего спуска без решения одномерной задачи минимизации? Если да, то как?

**Ответ:** Да, можно. Если дана квадратичная функция вида  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$ , то  $\alpha_k$  для спуска можно вычислить так:

$$\alpha_k = -\frac{\langle \nabla f(x^0), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

8. Запишите формулу для градиента квадратичной функции. Как определить константу Липшица для произвольной аналитически заданной функции (для метода градиентного спуска)?

**Ответ:** Для квадратичной функции  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$  градиент будет  $\nabla f(x) = Ax + b$ .  $L$  — константа Липшица, если  $\forall x, y : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ . Для градиента справедливо:

$$f(x+h) \approx f(x) + (\nabla f(x))^T h \quad h > 0$$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq L \cdot |(x+h) - x|$$

$$h \cdot |\nabla f(x)| \leq L \cdot h$$

$$|\nabla f(x)| \leq L$$

Значит можно оценить константу Липшица как  $L = \sup |\nabla f(x)|$

9. Указать условия того, что  $\{x^k\}$  — последовательность будет релаксационной в итерационном методе градиентного спуска: для квадратичной функции и для функции общего вида.

**Ответ:** Чтобы последовательность  $\{x^k\}$  была релаксационной для градиентного спуска, должно выполняться равенство:

$$x^k = x^{k-1} - \alpha \nabla f(x^{k-1}) \quad \alpha \in \left(0, \frac{2}{L}\right)$$

, где  $L$  — наибольшее собственное значение матрицы  $A$  квадратичной функции или константа Липшица произвольной функции.

10. В каком случае следует в методе градиентного спуска применять дробление шага  $\alpha_k$ ? Какие условия используются для принятия решения о дроблении шага на  $k$ -ой итерации?

**Ответ:** На каждом шаге проверяем пока условие  $f(x^k) > f(x^k + \alpha p^k)$  ложно, то делаем  $\alpha := \frac{\alpha}{2}$ .

11. Может ли итерационный процесс метода сопряженных градиентов сходиться для СЛАУ с отрицательно определенной матрицей? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** Да, может. Можно заметить что во всех формулах, где встречается матрица  $A$ , также встречается и направление спуска. Следовательно, если домножить матрицу  $A$  на  $-1$ , то направление спуска также поменяет направление, а значит в формулах не играет роли положительно или отрицательно определена матрица  $A$ . Значит метод будет по прежнему сходиться.

12. Матрицы СЛАУ с диагональным преобладанием: что это такое? Обязательно ли в методе сопряженных градиентов матрица должна быть с диагональным преобладанием для того, чтобы метод был сходящимся.

**Ответ:** Матрицы с диагональным преобладанием — матрица у которой на главной диагонали стоят элементы большие чем внедиагональные. Не обязательно для метода сопряженных градиентов наличие диагонального преобладания, важную роль играет только ее обусловленность.

13. В чем заключается основная идея метода Ньютона? Запишите итерационные формулы метода Ньютона.

**Ответ:** Если  $f(x)$  — дважды дифференцируемая функция, то через градиент и матрицу Гессе можно разложить в ряд Тейлора функцию  $f(x)$  получив квадратичную функцию:

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x^k) \Delta x + o(\|\Delta x^k\|)$$

$$\Phi_k(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x^k) \Delta x$$

Найдем минимум функции  $\Phi_k(x)$  через условие  $\nabla \Phi_k(x) = 0$ :

$$\nabla \Phi_k(x) = \nabla f(x^k) + H(x^k)(x - x^k) = 0$$

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) \nabla f(x^k)$$

— это итерационный процесс метода Ньютона

14. Для каких функций эффективно применение методов второго порядка?

**Ответ:** Методы второго порядка используют матрицу Гессе функции для вычисления приближительной квадратичной формы. Следовательно для функций, которые хорошо аппроксимируются рядом Тейлора второго порядка такие методы эффективны.

15. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта.

**Ответ:** Комбинация методов наискорейшего спуска и метода Ньютона

- + относительная простота
- + свойство убывания  $f(x)$  при переходе от итерации к итерации
- + отсутствие процедуры одномерного поиска
- + высокая скорость сходимости в окрестности  $x^*$
- решение СЛАУ
- вычисление Гессеана

16. Как определяется направление одномерного поиска в квазиньютоновских методах?

**Ответ:**

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k$$

$$p^k = -G_k \cdot \nabla f(x^{k-1})$$

Параметр  $\alpha_k$  может находиться с помощью одномерного поиска по функции:

$$\varphi_k(\alpha) = f(x^{k-1} + \alpha p^k)$$

17. Погрешность, невязка, число обусловленности и их связь. Приведите примеры.

**Ответ:** Пусть требуется решить СЛАУ  $Ax = b$ . Тогда **число обусловленности**  $\text{cond } A = \frac{L}{l}$ , где  $l, L$  — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы  $A$ . Пусть  $x^*$  — точное решение СЛАУ, а  $x$  — приближенное. Тогда **величина ошибки (относительная погрешность)**  $\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|}$ , а **невязка**  $\Gamma = b - Ax$   
Справедливо следующее неравенство:

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond } A \cdot \frac{\|b - Ax\|}{\|b\|}$$

*Пример.* Пример решение СЛАУ на машине с высокой погрешностью вычислений чисел с плавающей точкой:

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.457 & 0.330 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.127 \end{pmatrix}$$

$$x^* = (1 \ -1)^T \quad x = (1.71 \ -1.98)^T$$

$$\Delta x = (-0.71 \ 0.98)^T$$

$$\Gamma = (0.217 \ 0.127)^T - (0.21906 \ 0.12807)^T = (-0.00206 \ -0.00107)^T$$

$$0.8557 \leq \text{cond } A \cdot 0.0092$$

$$1130.2444 = \text{cond } A \geq 92.6864$$

18. Записать структуры для хранения матрицы в разреженно строчно-столбцовом и профильном форматах:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 60 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}$$

**Ответ:**

- Строчно-столбцовый формат

$$di = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90]$$

$$ia = [1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9, 11]$$

$$ja = [1, 1, 3, 5, 1, 3, 2, 5, 3, 6]$$

$$al = au = [1, 2, 4, 1, -1, 5, 6, -1, 2, 7]$$

- Профильный формат

$$di = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90]$$

$$ia = [1, 1, 2, 2, 5, 5, 8, 14, 20, 26]$$

$$al = au = [1, 2, 0, 0, 4, 0, 1, -1, 0, 5, 0, 0, 0, 6, 0, 0, -1, 0, 0, 2, 0, 0, 7, 0, 0]$$