

Лекция 7

Цуа Yaroshevskiy

21 ноября 2024 г.

Содержание

1 Критерии Сильвестра	1
1.1 Достаточный условия	1
1.2 Необходимые условия	1
2 Собственные значения	1
3 Общие принципы многомерной оптимизации	1
3.1 Выпуклые квадратичные функции	1
3.2 Принципы многомерной оптимизации	2
3.2.1 Скорость сходимости(минимизирующих последовательностей)	3
3.2.2 Критерии окончания итерационного процесса	3

1 Критерии Сильвестра

1.1 Достаточный условия

- $H(x^*) > 0$ и x^* — локальный минимум $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$
- $H(x^*) < 0$ и x^* — локальный максимум $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$

, где Δ_i — угловой минор

1.2 Необходимые условия

- $H(x^*) \geq 0$ и x^* — может быть локальный минимум $\Leftrightarrow \Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$
- $H(x^*) \leq 0$ и x^* — может быть локальный максимум $\Leftrightarrow \Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$

, где Δ_i — главный минор

2 Собственные значения

Определение. Собственные значения λ_i ($i = 1..n$) $H(x^*)_{n \times n}$ находятся как корни характеристического уравнения $|H(x^*) - \lambda E| = 0$. Если $H(x)$ — вещественная, симметричная матрица, то λ_i — вещественные

3 Общие принципы многомерной оптимизации

3.1 Выпуклые квадратичные функции

$$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

Определение. Функция вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c \quad (1)$$

Называется **квадратичной функцией n переменных**

Положим $a_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \Rightarrow$ симметрия. матрица A

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$$

, где $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in E_n$ — вектор коэффициентов, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. x, y — скалярное произведение
Свойства квадратичных функций:

1. $\nabla f(x) = Ax + b$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{ik} + a_{ki}) x_i + b_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + b_k \end{aligned}$$

2. $H(x) = A$, где $H(x)$ — Гессиян

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + b_k \right)$$

3. Квадратичная функция $f(x)$ с положительно определенной матрицей A сильно выпукла

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$A - lE = \begin{vmatrix} \lambda_1 - l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - l \end{vmatrix}$$

В этом базисе все угловые миноры матрицы A и матрицы $A - lE$ — положительны при достаточно малом $l: 0 < l < \lambda_{\min} \Rightarrow f(x)$ — сильно выпукла

3.2 Принципы многомерной оптимизации

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \quad x \in E_n \\ x^{k+1} &= \Phi(x^k, x^{k+1}, \dots, x^0), \quad x^0 \in E_n \end{aligned} \quad (2)$$

— итерационная процедура(общего вида)

$\{x^k\}$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) &= f^* = \min_{E_n} f(x), \quad \text{если } U^* \neq \emptyset \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) &= f^* = \inf_{E_n} f(x), \quad \text{если } U^* = \emptyset \end{aligned}$$

, где U^* — множество точек глобального минимума функции $f(x)$
 $\{x^k\}$ + условие 2 = минимизирующая последовательность для $f(x)$
Если для $U^* \neq \emptyset$ выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, U^*) = 0$$

, то x^k сходится к множеству U^* . Если U^* содержит единственную точку x^* , то для $\{x^k\}$ сходящейся к U^* будет справедливо $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$

Определение. $\rho(x, U) = \inf_{y \in U} \rho(x, y)$ — расстояние от точки x до множества U

Замечание. Минимизирующая последовательность $\{x^k\}$ может и не сходиться к точке минимума

Теорема 3.1 (Вейерштрасса). Если $f(x)$ непрерывна в E_n и множество $U^\alpha = \{x : f(x) \leq \alpha\}$ для некоторого α непусто и ограничено, то $f(x)$ достигает глобального минимума в E_n

3.2.1 Скорость сходимости(минимизирующих последовательностей)

Определение. $\{x^k\}$ сходится к точке x^* **линейно** (со скоростью геометрической последовательности), если $\exists q \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}\rho(x^k, x^*) &\leq q\rho(x^{k-1}, x^*) \\ \rho(x^k, x^*) &\leq q^k\rho(x^0, x^*)\end{aligned}\quad (3)$$

Определение. Сходимость называется **сверхлинейной** если

$$\rho(x^k, x^*) \leq q_k\rho(x^{k-1}, x^*)$$

, и $q_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +0$

Определение. **Квадратичная сходимость:**

$$\rho(x^k, x^*) \leq [c\rho(x^{k-1}, x^*)]^2, \quad c > 0$$

3.2.2 Критерии окончания итерационного процесса

$$\begin{aligned}\rho(x^{k+1}, x^*) &< \varepsilon_1 \\ |f(x^{k+1}) - f(x^k)| &< \varepsilon_2 \\ \|\nabla f(x^k)\| &< \varepsilon_3\end{aligned}\quad (4)$$

, где ε_i — заранее заданные точности

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

, где p^k — направление поиска из x^k в x^{k+1} , α_k — величина шага

$$f(x^{k+1}) < f(x^k)$$

— условие выбора α_k

Определение. В итерационном процессе 5 производится **исчерпывающий спуск**, если величина шага α_k находится из решения одномерной задачи минимизации:

$$\Phi_k(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad \Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha p^k) \quad (6)$$

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в пространстве E_n , то в итерационном процессе 5 с выбором шага с ичерпывающим спуском для любого $k \geq 1$:

$$(\nabla f(x^{k+1}), p^k) = 0 \quad (7)$$

— это значит что эти два вектора ортогональны

для $\Phi_k(\alpha)$ необходимое условие минимума функции:

$$\frac{d\Phi_k(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j^{k+1}}{d\alpha} = 0$$

учитывая $x_j^{k+1} = x_j^k + \alpha p_j^k \Rightarrow \frac{dx_j^k}{d\alpha} = p_j^k$

Теорема 3.3. Для квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ величина α_k ичерпывающего спуска в итерационном процессе

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad \alpha_k = 0, 1, \dots$$

равна

$$\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), p^k)}{(Ap^k, p^k)} = -\frac{(Ax^k + b, p^k)}{(Ap^k, p^k)} \quad (8)$$