Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Метод Ньютона(продолжение). Вывод через ряд Тейлора

- x_k — текущая оценка решения x^*

$$f(x_k + p) = f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2!}p^2 f''(x_k) + \dots$$

$$f(x^*) = \min_x f(x) = \min_p f(x_k + p) = \min_p [f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) + \dots] \approx$$

$$\approx \min_p [f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k)]$$

$$f'(x_k) + pf''(x_k) = 0$$

$$p = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

p — аппроксимация шага: от $x_k \to x^*$. $x^* \approx x_k + p$

$$x_{k+1} = x_k + p = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \tag{1}$$

Главное преимущество метода Ньютона:

- высокая(квадратичная) скорость сходимости
  - если x_k достаточно близка x^* и если $f''(x^*) > 0$, то:

$$|x_{k+1} - x^*| \le \beta |x_k - x^*|^2 \quad ,\beta = const > 0$$

Неудачи в методе Ньютона:

1. $f(x)$ плохо аппроксимируется первыми тремя членами в ряде Тейлора. x_{k+1} может быть хуже x_k
2. $p = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$ определено только тогда, когда $f''(x_k) \neq 0$
   $f''(x_k) > 0$ — условие минимума квадратичной аппроксимации
   Если $f''(x_k) < 0$ — алгоритм сходится к максимуму
3. Кроме $f(x)$ нужно вычислять $f'(x)$ и $f''(x)$, что в реальных задачах затруднительно

1.1 Аппроксимация производных

Правая разностная схема:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} \quad ,h \sim \varepsilon$$

Центральная разностная схема:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}$$

порядок точности — $O(h^2)$

1.2 Метод Ньютона(продолжение)

Если $f(x)$ — квадратичная функция, то $f'(x)$ — линейная
В 1 точное равенство, и следовательно метод Ньютона сходится за один шаг, при любом выборе x
Пусть $x^* \in [a, b]$ и $f(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая и выпуклая на $[a, b]$ функция.
$\{x_k\}$ будет сходится к пределе x^* монотонно, если:

$$0 < \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} < 1$$

$$f'(x^*) = 0 = f'(x_k) + f''(x_k(x^* - x_k)) + \frac{f'''(x_k)}{2}(x^* - x_k)^2$$

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \frac{x^* - x_k + \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}{x^* - x_k} = 1 - \frac{2}{2 + \frac{f'''(x)(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}}$$

Итерационная поледовательность $\{x_k\}$ монотонна, если $\frac{f'''(x)}{f'(x_k)} > 0$, то есть достаточное условие монотонной сходимости метода Ньютона: постоянство $x\ in[x^*, x_0]$ занка $f'''(x)$ и совпадение его со сзнаком $f'(x^0)$

Пример.

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

, пусть $|f'(x)| \leq 10^{-7}$

$$f'''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x)''(x) < 0$$

Выбор начального приближение $x_0 = 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$
0	1	0.785	$\frac{1}{2}$
1	-0.57	-0.518	0.754
2	0.117	0.116	...
3	...	...	...
4	$9 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-8}$	...

Выолнилось условие $|f'(x_k)| \leq 10^{-7}$ — окончание итерационного процесса. $x \approx 9 \cdot 10^{-8} \approx 0$

1.3 Модификации метода Ньютона

1.3.1 Метод Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad ,0 < \tau_k \leq 1$$

$\tau_k = \tau = const$ ($\tau = 1$ — метод Ньютона)

$$\varphi(\tau) = f(x_k - \tau\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}) \to \min$$

$$\tau_k = \frac{(f'(x_k))^2}{(f'(x_k))^2 + (f'(\tilde{x}_k))^2}$$

, где $\tilde{x} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

1.3.2 Метод Маркрафта

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k) + \mu_k} \quad , \mu_k > 0$$

μ_0 рекомендуется выбирать на порядок больше значения второй произвдной в x_0
μ_{k+1}: $\mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{2}$, если $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, иначе $\mu_{k+1} = 2 \cdot \mu_k$

1.4 Метод минимизации многомодальных функций

1.4.1 Метод ломанных

Условие Липшица: $f(x),\ x \in [a, b]$ будет удовлетворять условию, если:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad , \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\left.\begin{array}{r} x_1^* = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)] \\ p_1^* = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a - b)] \end{array}\right\} \text{— схема}$$

1. вместо (x_1^*, p_1^*)
   - (x_1', p_1)
     $$x_1' = x_1^* - \Delta_1$$
   - (x_1'', p_1)
     $$x_1'' = x_1^* + \Delta_1$$

   $$p_1 = \frac{1}{2}[f(x_1^*) + p_1^*]$$
   $$\Delta_1 = \frac{1}{2L}[f(x_1^* - p_1^*)]$$

2. Из пар $(x_1', p_1), (x_1'', p_1)$, выбрать ту, у которой вторая компонента p минимальна и обозначить ее (x_2^*, p_2^*) и исключить из рассматриваемого множесвта. Переход к шагу 1

В результате множество пар (x, p). $x^* \approx x_n^*$, $f^* \approx f(x_n^*)$

Пример.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad [10, 15] \quad \varepsilon = 0.01$$

$$|f'(x)) = \left|\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right| < \frac{x|\cos x| + \sin|x|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \leq 0.11 \ x \in [10, 15]$$

$$L = 0.11$$

$$x_1^* = 12.056 \quad p_1^* = -0.281$$