Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

$$\frac{l^i_{\text{з.с}}}{l^i_{\text{дих.}}} \approx (0.87\dots)^n$$

$$\frac{l^i_{\text{з.с}}}{l^i_{\text{фиб.}}} \approx 1.17$$

1 Одномерная оптимизация

1.1 Определение интервала неопределенности

x_0

1. Если $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$, то:
   - $k = 1$
   - $x_1 = x_0 + \delta$
   - $h = \delta$

   иначе если $f(x_0) > f(x_0) - \delta$, то:
   - $x_1 = x_0 - \delta$
   - $h = -\delta$
2. Удваиваем h:
   - $h = 2h$
   - $x_{k+1} = x_k + h$
3. Если $f(x_k) > f(x_{k+1})$, то:
   - $k = k + 1$
   - переходим к шагу 2

   Иначе:
   - прекращаем поиск $[x_{k-1}, x_{k+1}]$

2 Методы с использованием производной

- $f(x)$ — дифференцируемая или дважды дифференцируемая выпуклая функция
- вычисление производных в заданых точках

$f'(x) = 0$ — необходимое и достаточное условие глобального минимума. Если $x^* \in [a,b]$ $f'(x) \approx 0$ или $f'(x) \leq \varepsilon$ — условие остановки вычислений

2.1 Метод средней точки

$f'(x)$ $\quad \bar{x} = \frac{a+b}{2}$

- Если $f'(\bar{x}) > 0$, то $\bar{x} \in$ монотонно возрастающая $f(x)$, минимум на $[a, \bar{x}]$
- Если $f'(x) < 0$ минимум на $[\bar{x}, b]$
- Если $f'(x) = 0$ то $x^* = x$

Алгоритм

1. $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$, вычислим $f'(\bar{x}) \to$ шаг 2
2. Если $|f'(x)| \leq \varepsilon$, то $x^* = \bar{x}$ и $f(x^*) = f(\bar{x}) \to$ завершить
3. Сравнить $f'(\bar{x})$ с нулем:
   - Если $f'(x) > 0$, то $[a, \bar{x}], b = \bar{x}$
   - Иначе $[\bar{x}, b], a = \bar{x}$

   $\to$ шаг 1

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n}$$

2.2 Метод хорд(метод секущей)

Если на концах $[a,b]$ $f'(x)$: $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ и непрерывна, то на (a,b) $\exists x$ $f'(x) = 0$
$f(x)$ — минимум на $[a,b]$, если $f'(x) = 0$, $x \in (a,b)$
$F(x) = f'(x) = 0$ на $[a,b]$
$F(a) \cdot F(b) < 0$, $\bar{x}$ — точка пересечения $F(x)$ с осью Ox на $[a,b]$

$$\bar{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a-b) \tag{1}$$

$x^* \in [a, \tilde{x}]$ либо $[\tilde{x}, b]$

Алгоритм

1. $\tilde{x}$ — вычислим по 1
   вычислим $f'(\tilde{x}) \to$ шаг 2
2. Если $|f'(\tilde{x})| \leq \varepsilon$, то:
   - $x^* = \tilde{x}$
   - $f^* = f(\tilde{x})$
   - завершить

   Иначе:

   - $\to$ шаг 3
3. Переход к новому отрезку. Если $f'(\tilde{x}) > 0$, то:
   - $[a, \tilde{x}]$
   - $b = \tilde{x}$
   - $f'(b) = f'(\tilde{x})$

Иначе:

- $[\tilde{x}, b]$
- $a = \tilde{x}$
- $f'(a) = f'(\tilde{x})$

$\to$ шаг 1

Исключение.

1. $f'(a) \cdot f'(b) > 0,\ f(x)$ — возрастает
   - $x^* = a$
   - $x^* = b$
2. $f'(a) \cdot f'(b)$, **одно из**:
   - $x^* = a$
   - $x^* = b$

2.3 Метод Ньютона(метод касательной)

Если выпуклая на $[a, b]$ функция $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема, то $x^* \in [a, b]$: $f'(x) = 0$
Пусть $x_0 \in [a, b]$ — начальное приближение к x^*

$$F(x) = f'(x) \text{ — линеаризуем в корестнтсти } x_0$$

(x_0, f'(x_0)), то есть:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

x_1 —

- следующее приближение к x^*
- пересечение касательной с Ox

При $x = x_1$:

$$F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

$$x_1 = x_0 = \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

$\{x_k\},\ k = 1, 2, \ldots$ — итерационная последовательность
$F(x)$ в точке $x = x_k$ имеет вид:

$$y = F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)$$

$x = x_{k+1}$ $y = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

$$f'(x) = 0 x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad , k = 1, 2, \ldots$$

Итерационный процесс: $|f'(x_k)| \le \varepsilon$:

- $x^* \approx x$
- $x^* \approx f(x_k)$