Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Одномерный поиск

1.1 Метод золотого сечения

Примечание. Возьмем отрезок $[0, 1]$

- $x_2 = \tau \Rightarrow x_1 = 1 - \tau$
- $x_1 \Rightarrow x_2' = 1 - \tau \in [0, \tau]$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{tau}{1-\tau} \Rightarrow \tau^2 = 1 - \tau$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$$

- $x_1 = 1 - \tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1. $x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)$
2. $x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$

$$\Delta_n = \tau^n(b-a)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n(b-a)$$

ε — задано. Окончание: $\varepsilon_n \le \varepsilon$
На n-ой итерации: $x^* = \frac{a_{(n)}+b_{(n)}}{2}$

$$n \ge \frac{\ln\left(\frac{2\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln\tau} \approx 2.1\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)$$

Алгоритм.

1. $x_1,\ x_2$ по формулам 1 и 2
$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$$
2. $\varepsilon_n > \varepsilon$ — шаг 3, иначе 4
3. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то:
    - запоминаем $f(x_1)$

- $b = x_1$
- $x_2 = x_1$
- $x_1 = a + \tau(b - a)$

Иначе:

- запоминаем $f(x_2)$
- $a = x_1$
- $x_1 = x_2$
- $x_2 = b - \tau(b - a)$

$\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$, переход к шагу 2

4. $x^* = \bar{x} = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$
   $f^* \approx f(\bar{x})$

1.2 Метод Фибоначчи

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , n = 1, \; F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad n \to \infty$$

Итерация 0:

- $x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b - a)$
- $x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b - a) = a + b - x_1$

Итерация k:

- $$x_1 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$
- $$x_2 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Итерация n:

- $x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+1}}(b_0 - a_0)$
- $x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$

$$\frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon$$

Как выбирать n:

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}$$

Когда n большое $\Rightarrow \frac{F_n}{F_{n+2}}$ — бесконечная десятичная дробь

1.3 Метод парабол

- $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$
- $x_1 < x_2 < x_3$
- $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

- $q(x_1) = f(x_1) = f_1$
- $q(x_2) = f(x_2) = f_2$
- $q(x_3) = f(x_3) = f_3$
- $a_0 = f_1$
- $a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$
- $a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right)$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2}\right) \text{ — минимум параболы } q(x)$$