

1.2 Решение СЛАУ. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b$$

- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — вещественные числа
- $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ Верхний индекс обозначает этап.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \quad i, j = \overline{2, n}$$

Примечание. $a_{11} \neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + a_{n4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)} \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)}$$

$n - 1$ этап:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}b_k^{(k-1)} \quad k \in \overline{1, n}; \quad i, j \in \overline{k+1, n}$$

1.3 Обратный ход Гаусса

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

\vdots

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki}^{(k-1)} x_i}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad k \in \overline{n, 1}$$

$\sum_j^n = 0$, если $j > n$

Алгоритм 1 метод Гаусса

- 1: **для** $k = 1, \dots, n - 1$ **делать**
 - 2: **для** $i = k + 1, \dots, n$ **делать**
 - 3: $t_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
 - 4: $b_i = b_i - t_{ik} b_k$
 - 5: **для** $j = k + 1, \dots, n$ **делать**
 - 6: $a_{ij} = a_{ij} - t_{ik} a_{kj}$
 - 7: **конец для**
 - 8: **конец для**
 - 9: **конец для**
 - 10: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
 - 11: **для** $k = n - 1, \dots, 1$ **делать**
 - 12: $x_k = \frac{(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j)}{a_{kk}}$
 - 13: **конец для**
-

Модификация с постолбцовым выбором главного элемента

Алгоритм 2 модификация алгоритма гаусса

$m : m \geq k, |a_{mk}| = \max_{i \geq k} \{|a_{ik}|\}$ $j = k, \dots, n$ поменять местами b_x и b_m поменять местами a_{kj} и a_{mj}
