

Лекция 1, 2

Луа Yaroshevskiy

21 ноября 2024 г.

Содержание

1	Теория погрешности	1
1.1	Значащие цифры	2
1.2	Верные цифры	2
1.3	Распространение погрешности	2
2	Одномерная минимизация функций	3
2.1	Унимодальные функции	3
2.2	Прямые методы	4
2.2.1	Метод дихотомии	4

1 Теория погрешности

Отклонение от теоретического решения Виды погрешности:

1. Неустраняемая погрешность
Пример. Физические величины, другие константы
2. Устраняемая погрешность Связана с методом решения
 - (a) Погрешность модели
Связана с математической формулировкой задачи. Она плохо отображает реальную модель
 - (b) Остаточная погрешность (Погрешность аппроксимации)
 - (c) Погрешность округления
 - (d) Накапливаемая погрешность
Нецелые числа

-
- X^* — точное решение
 - X — Приближенное решение
 - $X^* - X$ — погрешность
 - $\Delta X = |X^* - X|$ — абсолютная погрешность
 $\Delta_X \geq |X^* - X|$ — предельная абсолютная погрешность, т.е.

$$X - \Delta_X \leq X^* \leq X + \Delta_X$$

- $\delta X = \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$ — относительная погрешность
 $\delta_X \geq \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$ — предельная относительная погрешность

1.1 Значащие цифры

Определение. Все цифры в изображении отличные от нуля, и нули если они содержатся между значащими цифрами, или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряды точности. Нули стоящие левее, отличной от нуля цифры, не являются значащими цифрами. Между ненулевыми, или указывающие на точность

Пример. $\underbrace{0.00}_{\text{незнач.}} 2080$

Пример. $689000 = 0.689 \cdot 10^6$ — 3 значащие цифры $689000 = 0.689000 \cdot 10^6$ — 6 значащих цифр

1.2 Верные цифры

Если, значащая цифра приближенного значения, находящаяся в разряде, в котором выполняется условие — абсолютное значение погрешности не превосходит половину единицы этого разряда $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$, где k — номер разряда, то она называется верной

Пример. $a = 3.635$
 $\Delta a = 0.003$

$$(3) k = 0 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$$

$$(6) k = -1 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$$

$$(3) k = -2 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$$

$$(5) k = -3 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 < \Delta a \Rightarrow 5 \text{ — сомнительная цифра}$$

1.3 Распространение погрешности

Пример. $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$

$$\frac{7}{5} = 1.4$$

$$\frac{17}{12} = 1.41666$$

$$\frac{707}{500} = 1.414$$

$$\sqrt{2} = 1.4142145624$$

$$\Delta_{x \pm y} = \Delta_x \pm \Delta_y$$

$$\Delta_{(x \cdot y)} \approx |Y| \Delta_X + |X| \Delta_Y$$

$$\Delta_{\left(\frac{x}{y}\right)} \approx \left|\frac{1}{Y}\right| \Delta_X + \left|\frac{X}{Y^2}\right| \Delta_Y$$

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)|$$

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i| \quad (1)$$

$$|\delta u| = \frac{1}{|u|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{u} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|$$

$$\delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|$$

$$\delta_{(X \pm Y)} = \left| \frac{X}{X \pm Y} \right| \delta_X + \left| \frac{Y}{X \pm Y} \right| \delta_Y$$

$$\delta_{(X \cdot Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

$$\delta_{\left(\frac{X}{Y}\right)} = \delta_X + \delta_Y$$

Пример. $x = \frac{7}{5}$

- $f_1 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$$\delta_{f_1} = 3 \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right| \cdot |\Delta X| = 6.25|\Delta X|$$

- $f_2 = (\sqrt{2}-1)^6$

$$\delta_{f_2} = 6 \left| \frac{1}{x-1} \right| \cdot |\Delta X| = 15|\Delta X|$$

- $f_3 = (3-2\sqrt{2})^3$

$$\delta_{f_3} = 6 \left| \frac{1}{3-2x} \right| \cdot |\Delta X| = 30|\Delta X|$$

- $f_4 = 99 - 70\sqrt{2}$

$$\delta_{f_4} = \left| \frac{90}{99-70x} \right| \cdot |\Delta X| = 70|\Delta X|$$

Пример.

$$y^2 - 140y + 1 = 0$$

Вычислить корни.

- $y = 70 - \sqrt{4899}$
 $\sqrt{4899} = 69.992\dots$
 $\sqrt{4899} \approx 69.99$
 $y \approx 70 - 69.99 = 0.01$

$$y = \frac{1}{70 + \sqrt{4899}}$$

$$\sqrt{4899} = 69.99; 70 + 69.99 = 139.99$$

$$y = \frac{1}{140} = 0.00714285 \approx 0.007143$$

2 Одномерная минимизация функций

2.1 Унимодальные функции

$$f(x) \rightarrow \min, x \in U$$

$$f(x) \rightarrow \max \Rightarrow -f(x) \rightarrow \min$$

$$x^* \in U - \text{точка минимума: } f(x^*) \leq f(x) \forall x \in U$$

U^* — множество точек минимума

$$\tilde{x} \in U : \exists V(\tilde{x}) \forall x \in V f(\tilde{x}) \leq f(x) - \text{локальный минимум}$$

Определение. $f(x)$ — унимодальная функция на $[a, b]$, если:

1. $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$
2. $\exists \alpha, \beta : a \leq \alpha \leq \beta \leq b$
 - (a) Если $a < \alpha$, то на $[a, \alpha]$ $f(x)$ — монотонно убывает
 - (b) Если $\beta < b$, то на $[\beta, b]$ $f(x)$ — монотонно возрастает
 - (c) $\forall x \in [\alpha, \beta] f(x) = f^* = \min_{[a,b]} f(x)$

Замечание. Свойства:

1. Любая из точек локального минимума является глобальным минимумом на этом же отрезке
2. Функция унимодальная на $[a, b]$ унимодальна на $[c, d] \subset [a, b]$
3. $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$ $a \leq x_1 < x_2 \leq b$
 - (a) если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$
 - (b) если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$

Определение. $f(x)$ **выпукла** на $[a, b]$, если:

- $\forall x', x'' \in [a, b]$ и $\alpha \in [0, 1]$:

$$f(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'')$$

Замечание. Свойства:

1. Если $f(x)$ на $[a, b]$ $[x', x''] \subset [a, b]$
2. Всякая выпуклая и непрерывная функция на $[a, b]$ является унимодальной на этом отрезке. Обратное не верно

Определение. $x : f'(x) = 0$ — **стационарная точка**

2.2 Прямые методы

Не требуют вычисление производной. Могут использовать только известные значения.

2.2.1 Метод дихотомии

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b + a - \delta}{2} & x_2 &= \frac{b + a + \delta}{2} \\ \tau &= \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \rightarrow \frac{1}{2} \\ X^*[a_i, b_i] & \quad \frac{b_i - a_i}{2} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

1. x_1 и x_2 ; вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2. $f(x_1)$ и $f(x_2)$
 - Если $f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow [a, x_2]$, т.е. $b = x_2$
 - Иначе $[x_1, b] \rightarrow [x_1, b]$, т.е. $a = x_1$
3. $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^n}$ (n — номер итерации)
 - Если $\varepsilon_n > \varepsilon$ — переход к следующей итерации(шаг 1)
 - Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, завершить поиск(шаг 4)
4. $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}$ $f^* \approx f(\bar{x})$

$$2 \quad \delta \in (0, 2\varepsilon)$$

$$\text{Число итерций } n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$$