Вопросы к зачету

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Топология

1.1 Топологическое пространство, открытое и замкнутое множество

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

1.2 Внутренность и замыкание множества

Определение.

$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \big| w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

Определение. **Замыкание** X — $\overline{X} = \text{наим.}\{A \notin \Omega \big| X \subseteq A\}$

1.3 Топология стрелки

Теорема 1.1.

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \to b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \le \rangle$ — алгебра Гейтинга

1.4 Дискретная топология

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \le \rangle$ — булева алгебра

1.5 Топология на частично упорядоченном множестве

Топология на частично упорядоченном множестве $\langle \Omega, \le \rangle$ — булева алгебра, где Ω — дискретная топология

1.6 Индуцированная топология

Определение. **Индуцированная топология** на подпространстве $\langle X, \Omega \rangle$ — топлогия. Пусть $Y \subset X$. Определим Ω_Y — семейство подмножеств Y так:

$$\Omega_Y = \{U \cap Y \big| U \in \Omega\}$$

Ω_Y — индуцированная топология на подпространстве Y.

1.7 Связность

Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ **связно**, если нет таких открытых множеств A и B, что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \varnothing$

2 Исчисление высказываний

2.1 Метапеременные, пропозициональные переменные, Высказывания

2.1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
   A'_i — большая буква начала латинского алфавита
2. Связки
   $\underbrace{\alpha}_{\text{метапеременная}}, \beta$ — высказывания
   Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания

2.1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$ — метапеременные для выражений
- X, Y, Z — метапеременные для предметных переменные

Метавыражение: $\alpha \to \beta$
Предметное выражение: $A \to (A \to A)$ (заменили α на A, β на $(A \to A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

2.2 Схемы аксиом, доказуемость

2.2.1 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответсвующая определению высказывания, с:

- метапеременными $\alpha, \beta, \dots$

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg \beta) \to \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \to \alpha$

2.3 Правило Modus Ponens, доказательство, вывод из гипотез

2.3.1 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где α_i:

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Пример. $\vdash A \to A$

1	$A \to A\ \to A$	(схема аксиом 1)
2	$A \to (A \to A) \to A$	(схема аксиом 1)
3	$(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(схема аксиом 2)
4	$(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(M.P. 1 и 3)
5	$A \to A$	(M.P. 2 и 4)

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$

2.4 Множество истинностных значений, модель (оценка перменных), Оценка высказывания

2.4.1 Теория моделей

- $\mathcal{P}$ — множество предметных переменных
- $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to V$, где $\mathcal{T}$ — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истиностных значений

1. $[\![x]\!] : \mathcal{P} \to V$ — задается при оценке
   $[\![]\!]^{A:=v_1, B:=v_2}$:
   - $\mathcal{P} = v_1$
   - $\mathcal{P} = v_2$
2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \underbrace{\star}_{\substack{\text{определенно} \\ \text{ественным образом}}} [\![\beta]\!]$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \to]$

   Пример.

   $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} \to [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \text{И} \to \text{И} = \text{И}$$

   Также можно записать так:

   $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = f_{\to}([\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}, [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}) = f_{\to}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

   , где $f_{\to}$ определена так:

a	b	$f_{\to}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

2.5 Общезначимость

Пример. $\vDash \alpha$ — α общезначимо

2.6 Выполнимость

Существует оценка, при которой высказывание истинно

2.7 Невыполнимость

Отрицание выполнимости

2.8 Следование

Определение. Следование: $\Gamma \vDash \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$
- Всегда когда все $[\![\gamma_i]\!] = И$, то $[\![\alpha]\!] = И$

2.9 Корректность

Определение. ~~Теория~~ Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\vDash \alpha$

2.10 Полнота

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\vDash \alpha$ следует $\vdash \alpha$

2.11 Противоречивость

Определение. Множество формул Γ **противоречиво**, если для некоторой формулы α имеем $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$

2.12 Теорема о дедукции

Теорема 2.1 (о дедукции)**.** $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ <u>тогда и только тогда, когда</u> $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

2.13 Теорема о корректности

Теорема 2.2 (о корректности)**.** Пусть $\vdash \alpha$
<u>Тогда</u> $\vDash \alpha$

2.14 Теорема о полноте ИВ

Теорема 2.3 (о полноте)**.** Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

3 Интуиционистское исчисление высказываний

Отличается от ИВ 10-ой схемой аксиом: вместо $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ стало $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$

3.1 Закон исключенного третьего

$$\vdash A \vee \neg A$$

3.2 Закон снятия двойного отрицания

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

3.3 Закон Пирса

$$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

3.4 BHK-интерпретация логических связок

3.4.1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b, что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$

Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если нет, то OK
- Если да, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

BHK-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить α в β
- $\perp$ — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

3.5 Теорема Гливенко

Теорема 3.1. Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{к} \alpha$, а в интуцонистской как $\vdash_{и}$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_{к} \alpha$, то $\vdash_{и} \neg\neg\alpha$

3.6 Решетка

Определение. Фиксируем A
Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение
Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \leq b \vee b \leq a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \leq x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \leq k$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b: $\{x \big| a \leq x \& b \leq x\}$
- **Множество нижних граней** a и b: $\{x \big| x \leq a \& x \leq b\}$

Определение.

- $a + b$ — нименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. Решетка $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для каждых a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

3.7 Дистрибутивная решетка

Определение. Дистрибутивная решетка если всегда $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Лемма 1. *В дистрибутивной решетке* $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

3.8 Импликативная решетка

Определение. Псевдодополнение $a \to b = \text{наиб.}\{c \big| a \cdot c \le b\}$

Определение. Импликативная решетка — решетка, где для любых a, b есть $a \to b$

Определение. 0 — наименьший элемент решетки, **1** — наибольший элемент решетки

Лемма 2. *В импликативной решетке всегда есть* 1.

Лемма 3. *Импликативная решетка дистрибутивна*

3.9 Алгебра Гейтинга

Определение. Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) — импликативная решетка с 0

Теорема 3.2. Любая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

Пример. см. 1.3

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$
- $\varphi(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathfrak{B}}$

Теорема 3.3. $a \le b$, то $\varphi(a) \le \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g: оценки ИИВ
- f: ИИВ $\to \mathfrak{A}$
- g: ИИВ $\to \mathfrak{B}$

φ согласована с f, g, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 3.4. если $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ согласована с f, g и оценка $[\![\alpha]\!]_g \ne 1_{\mathfrak{B}}$, то $[\![\alpha]\!]_f \ne 1_{\mathfrak{A}}$

Теорема 3.5. Алгебра Гейтинга — полная модель ИИВ

3.10 Булева алгебра

Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

Пример. см. 1.4

Пример.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

- $a \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot b = b$
- $a \cdot b = 0$
- $a + b = 1$

- $a \to b = \text{наиб.}\{x \big| a \cdot x \leq b\} = b$
  $\{x \big| a \cdot x \leq\} = \{0, b\}$
- $a \to 1 = 1$
- $a \to 0 = 0$

Можем представить в виде пары $\langle x, y \rangle$

- $a = \langle 1, 0 \rangle$
- $b = \langle 0, 1 \rangle$
- $1 = \langle 1, 1 \rangle$
- $0 = \langle 0, 0 \rangle$

Теорема 3.6. Любая булева алгебра — модель КИВ

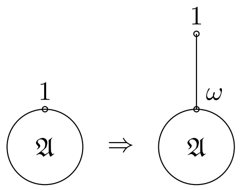
3.11 Геделева алгебра

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

3.12 Операция $\Gamma(A)$

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



   Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ переименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

Теорема 3.7.

- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — Геделева

3.13 Алгебра Линденбаума

Определение. X — все формулы логики

- $\alpha \leq \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_{\approx} = \{\gamma \big| \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности
- $X/_{\approx} = \{[\alpha]_{\approx} \big| \alpha \in X\}$

$\langle X/_{\approx}, \leq \rangle$ — алгебра Гейтинга

Свойство 1. *$\langle X/_{\approx}, \leq \rangle$ — алгебра Линденбаума, где $X, \approx$ — из интуиционистской логики*

3.14 Свойство дизъюнктивности ИИВ

Определение. **Дизъюнктивность** ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Теорема 3.8. ИИВ дизъюнктивно

3.15 Свойство нетабличности ИИВ

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- V — множество истинностных значений
  $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{V} : V^2 \rightarrow V,\ f_{\neg} : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $[\![p_i]\!] \in V\ f_{\mathcal{P}} : p_i \rightarrow V$
- $[\![p_i]\!] = f_{\mathcal{P}}(p_i)$
  $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_{\star}([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$
  $[\![\neg\alpha]\!] = f_{\neg}([\![\alpha]\!])$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $[\![\alpha]\!] = T$, при любой $f_{\mathcal{P}}$

Теорема 3.9. У ИИВ не существует полной конечной табличной модели

3.16 Модель Крипке, Вынужденность

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_k \Vdash p$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha\&\beta$
2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
   Тогда $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
4. $W_i \Vdash \neg\alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i: $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 3.10. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\vDash \alpha$

Теорема 3.11. ИИВ корректна в модели Крипке

4 Исчиление предикатов

4.1 Предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные

Определение. Язык исчисления предикатов

- логические выражения “предикаты“/“формулы“
- предметные выражния “термы“

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \ldots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы

  - f, g, h — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \dots \Theta_n)$ — применение функциональных символов

- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок
  - P — метаперменные для предикатных символов
  - A, B, C — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    “<квантор> <переменная>.<выражение>“

4.1.1 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \rightarrow D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \rightarrow V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y.\ E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$
- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x, y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x, y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall \boxed{\boxed{\mathrm{n}} > \boxed{\mathrm{N}}}\ \ \boxed{\boxed{|\mathrm{a}_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \rightarrow \exists N.\forall n.(n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат

- $|\bullet|(a) = m_{|}(a)$
- $(-)(a,b) = m_{-}(a,b)$
- $0() = m_0$
- $a_{\bullet}(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\ \boxed{\mathrm{G}(\boxed{\mathrm{e}},\ \boxed{\mathrm{m_0}})} \rightarrow \exists n_0.\forall n.\ \boxed{\mathrm{G}(\mathrm{n},\ \mathrm{n_0})} \rightarrow \boxed{\mathrm{G}\Big(\mathrm{e},\ \boxed{\mathrm{m}_{|}\Big(m_{-}\big(m_a(n), a\big)\Big)}\Big)}$$

4.2 Свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу

4.2.1 Вхождение

Пример.

$$(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})) \rightarrow (R(\underset{3}{x})\&(\underbrace{\ \forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})\ }_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по пермененной 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

α_1 $x = 0 \rightarrow x = 0$

α_2 $(\exists x.x = 0) \rightarrow (x = 0)$ — не доказано

α_2' $(\exists t.x = 0) \rightarrow (x = 0)$ — (правило $\exists$)

Пример.

(n) $x = 0 \rightarrow y = 0$ — откуда то

$(n+1)$ $(\exists x.x = 0) \rightarrow (y = 0)$ — (правило $\exists$)

4.2.2 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая свободная перменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ"

Пример.

$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

Пример.

$$(P(x) \vee \forall x.P(x))[x := y] \equiv P(y) \vee \forall x.P(x)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{\ y\ }_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в Θ. Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y+z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

4.3 Свобода для подстановки, Правила вывода для кванторов, аксиомы исчисления предикатов для кванторов, оценки и модели в исчислении предикатов

4.3.1 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ.

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Правило $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{(\exists x.\psi) \to \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная x стала связанная.

4.4 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема 4.1. Пусть задана $\Gamma,\ \alpha, \beta$

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если в доказательстве $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в α
2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

4.5 Теорема о корректности для исчисления предикатов

Определение (Условие для корректности)**.** Правила для кванторов по свободным перменным из Γ запрещены.
Тогда $\Gamma \vdash \alpha$ влечет $\Gamma \models \alpha$

4.6 Полное множество (бескванторных) формул

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Теорема 4.2. Если Γ — непротиворечивое множество з.б. фомул и α — з.б. формула.
То либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з.б. формул

Теорема 4.3. Если Γ — непр. мн. з.б. фомул, то можно построить Δ — полное непр. мн. з.б. формул. $\Gamma \subseteq \Delta$ и в языке — счетное количество формул

Определение. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — формулы з.б.

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ — смотря что непротиворечивое
- $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$$

Свойство 2. Γ^* *— полное*

Свойство 3. Γ^* *— непротиворечивое*

Теорема 4.4. Любое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул Γ имеет модель, т.е. существует оценка $[\![]\!]$: если $\gamma \in \Gamma$, то $[\![\gamma]\!] = И$

Теорема 4.5. Если Γ_i — непротиворечиво, то Γ_{i+1} — непротиворечиво

Теорема 4.6. $\Gamma*$ — непротиворечиво

Следствие 4.6.1. $\Gamma^{\triangle} = \Gamma*$ без формул с $\forall, \exists$

Определение. Предваренная нормальная форма — формула, где $\forall\exists\forall\ldots(\tau)$, τ — формула без кванторов

Теорема 4.7. Если φ — формула, то существует ψ — в п.ф., то $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$

4.7 Модель для формулы

Определение. Моделью для непротиворечивого множества замкнутых бескванторных формул Γ — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И

4.8 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема 4.8 (Геделя о полноте)**.** Если Γ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

Теорема 4.9 (Геделя о полноте ИП)**.** У любого н.м.з.ф. (непротиворечивого множества замкнутых формул) ИП существует модель

4.9 Следствие из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов

Следствие 4.9.2. Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

4.10 Неразрешимость исчисления предикатов (формулировка, что такое неразрешимость).

Определение. Язык — множество слов. Язык $\mathcal{L}$ разрешим, если существует A — алгоритм, что по слову w:
$A(w)$ — останавливается в '1', если $w \in \mathcal{L}$ и '0', если $w \notin \mathcal{L}$

Примечание. Проблема останова: не существует алгоритма, который по программе для машина Тьюринга ответит, остановится она или нет.
Пусть $\mathcal{L}'$ — язык всех останов программы для машины Тьюринга. $\mathcal{L}'$ неразрешим

Теорема 4.10. ИП неразрешимо

5 Арифметика и теории первого порядка

5.1 Теория первого порядка

Определение. Теория I порядка — Исчесление предикатов + нелогические функции + предикатные символы + нелогические (математические) аксиомы.

5.2 Модели и структуры теорий первого порядка

Назовём **структурой** теории первого порядка такую модель исчисления предикатов, что для всех нелогических функциональных и предикатных символов теории в ней задана оценка. Назовём **моделью** теории первого порядка такую структуру, что все нелогические аксиомы данной теории в ней истинны.

5.3 Аксиоматика Пеано

Определение. Будем говорить, что N соответсвует **аксиоматике Пеано** если:

- задан $(')$: $N \to N$ — инъективная функция (для разных элементов, разные значения)
- задан $0 \in N$: нет $a \in N$, что $a' = 0$
- если $P(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от $x \in N$, такое, что $P(0)$ и всегда, когда $P(x)$, также и $P(x')$. Тогда $P(x)$

5.4 Определение операций (сложение, умножение, возведение в степень)

Определение.

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a+c)' & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ (a^c) \cdot a & b = c' \end{cases}$$

5.5 Формальная арифметика (язык, схема аксиом индукции и общая характеристика остальных аксиом).

5.5.1 Формальная арифметика

Определение. Исчесление предикатов:

- Функциональные символы:
  - 0 — 0-местный
  - $(')$ — 1-местный
  - $(\cdot)$ — 2-местный
  - $(+)$ — 2-местный
- $(=)$ — 2-местный предикатный символ

Аксимомы:

1. $a = b \to a' = b'$
2. $a = b \to a = c \to b = c$

3. $a' = b' \to a = b$
4. $\neg a' = 0$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a \cdot 0 = 0$
8. $a \cdot b' = a \cdot b + a$
9. Схема аксиом индукции:

$$(\psi[x := 0])\&(\forall x.\psi \to (\psi[x := x'])) \to \psi$$

x входит свободно в ψ

Свойство 1.

$$((a + 0 = a) \to (a + 0 = a) \to (a = a))$$

Доказательство.

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$

$$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c) \to \forall b.\forall c.(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$$

$$\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c$$

$$(\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c) \to \forall c.(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c)$$

$$\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$$

$$(\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c) \to a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$

$$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$

$$a + 0 = a$$

$$a + 0 = a \to a = a$$

$$a = a$$

$$\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$

$$(0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0)$$

$$(\forall b.\forall c.a = b \to a = c\ tob = c) \to (0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0) \to \phi$$

Исправить ☐

Определение. $\exists!x.\varphi(x) \equiv (\exists x.\varphi(x))\&\forall p.\forall q.\varphi(p)\&\varphi(q) \to p = q$
Можно также записать $\exists!x.\neg\exists s.s' = x$ или $(\forall q.(\exists x.x' = q) \vee q = 0)$

Определение. $a \le b$ — сокращение для $\exists n.a + n = b$

Определение.

$$\overline{n} = 0^{(n)}$$

$$0^{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0^{(n-1)'} & n > 0 \end{cases}$$

6 Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции

Определение. $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

1. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $Z(x) = 0$
2. $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $N(x) = x + 1$
3. $S_k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $f_1, \dots, f_k : \ \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

   $$S_k \langle g, f_1, \dots, f_k \rangle (x_1, \dots, x_m) = g(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \dots, f_k(\overline{x}))$$

   , где $\overline{x} = x_1, \dots, x_m$
4. $P_k^l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $l \leq k$
   $$P_k^l(x_1, \dots, x_k) = x_l$$
5. $R \langle f, g \rangle : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ — **примитивная рекурсия**
   - $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $g : \mathbb{N}^{m+2} \to \mathbb{N}$

   $$R \langle f, g \rangle (y, x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_m) & y = 0 \\ g(y-1, R \langle f, g \rangle (y-1, x_1, \dots, x_m), x_1, \dots, x_m) & y > 0 \end{cases}$$

Определение.

6. $M \langle f \rangle : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ — **минимизация**
   - $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

   $$M \langle f \rangle (x_1, \dots, x_m) = y$$

   — минимальный y
   $$f(y, x_1, \dots, x_m) = 0$$
   Если $f(y, x_1, \dots, x_m) > 0$ при всех y, то результат не определен

Определение. $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ — **примитивно-рекурсивная**, если найдется g – выражение f через примитивы Z, N, S, P, R, т.е. $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$

6.1 Примитивная рекурсивность арифметических функций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма

Теорема 6.1. $(+), (\cdot), (x^y), (:), (\sqrt{})$, деление с остатком — примитивно-рекурсивные функции

Лемма 4. *$p_1, p_2, \dots$ — простые числа.*
$p(i) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(i) - p_i$ — примитивно-рекурсивная функция

Определение. $\operatorname{plog}_n k = \max t : n^t | k$ — примитивно-рекурсивная функция

6.2 Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике

6.2.1 Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике

Определение. $W \subseteq \mathbb{N}_0^n$. W — выразимое в формальной арифметике. отношение, если существует формула ω со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$. Пусть $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

- $(k_1, \dots, k_n) \in W$, тогда $\vdash \omega[x_1 := \overline{k_1}, \dots, x_n := \overline{k_n}]$
- $(k_1, \dots, k_n) \notin W$, тогда $\vdash \neg\omega[x_1 := \overline{k_1}, \dots, x_n := \overline{k_n}]$

$$\omega[x_1 := \Theta_1, \dots, x_n := \Theta_n] \equiv \omega(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$$

Определение. $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — представим в формальной арифметике, если найдется φ — фомула с $n+1$ свободными переменными $k_1, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$

- $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$, то $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_{n+1}})$
- $\vdash \exists! x.\varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, x)$

6.3 Харктеристические функции

Назовём **характериситческим отношением** C_f для функции $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ такое отношение $C_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, что $\langle k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\rangle \in C_f$ тогда и только тогда, когда $f(k_1, k_2, \dots, k_n) = k_{n+1}$.

Лемма 5. *Если функция представима в формальной арифметике, то её характеристическое отношение выразимо в формальной арифметике.*

6.4 Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике

Теорема 6.2. Примитивы Z, N, S, P представимы в ФА

Доказательство. Аргументы: $x_1, \dots, x_n$

1. $Z(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\xi \coloneqq x_1 = x_1 \& x_2 = 0$$
2. $N(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\nu \coloneqq x_2 = x_1'$$
3. $P_k^l(x, \dots, x_k) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
$$\pi_k^l \coloneqq x_1 = x_1 \& x_2 = x_2 \& \dots \& x_l = x_{k+1} \& \dots \& x_k = x_k$$
$$\left(\underset{i \neq l}{\&} x_i = x_i\right) \& x_l = x_{k+1}$$
4. $S\left\langle \underset{\gamma}{g}, \underset{\varphi_1}{f_1}, \dots, \underset{\varphi_k}{f_k} \right\rangle$
   - $(x_1, \dots, x_m) = x_{m+1}$
$$\exists r_1.\exists r_2.\dots\exists r_k.\varphi_1(x_1, \dots, x_m, r_1) \& \dots \& \varphi_k(x_1, \dots, x_m, r_k) \& \gamma(r_1, \dots, r_k, x_{m+1})$$

$\square$

6.5 Бета-функция Гёделя

Определение. β-функция Геделя

$$\beta(b, c, i) = b \bmod (1 + c \cdot (i + 1))$$

Теорема 6.3.

- $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — некоторые значения $\in \mathbb{N}$

Тогда найдутся b и c, что

$$\beta(b, c, i) = a_i$$

Примечание. β-функция Геделя — представима в ФА

$$B(b, c, i, q) = (\exists p.b = p \cdot (q + c \cdot (1 + i)) + q) \& q < b$$

6.6 Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике

Примечание.

- $M\langle f \rangle$, $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

$$\varphi(x_{m+1}, x_1, \ldots, x_m, \overline{0}) \& \forall y.y < x_{m+1} \to \neg\varphi(y, x_1, \ldots, x_m, \overline{0})$$

  , где $(a < b) = (\exists n.a + n = b) \& \neg a = b$

- $$R\langle g, x_1, \ldots, x_n \rangle = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) y = 0 & y = 0 \\ g(y - 1, R(y - 1, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) & y > 0 \end{cases}$$

$$\exists b.\exists c.\exists f.\varphi(x_1, \ldots, x_n f) \& B(b, c, \overline{0}, f) \&$$

$$\& \forall y.y < x_{n+1} \to \exists r_y.B(b, c, y, r_y) \& \exists r_{y+1}.B(b, c, y + 1, r_{y+1}) \& \gamma(y, r_y, x_1, \ldots, x_n, r_{y+1})$$

6.7 Гёделева нумерация

Определение. ($\ulcorner \bullet \urcorner$)

s	$\ulcorner s \urcorner$
(	3
)	5
,	7
&	9
$\vee$	11
$\neg$	13
$\to$	15
$\forall$	17
$\exists$	19
.	21
f_k^n	$23 + 6 \cdot 2^n \cdot 3^k$
P_k^n	$25 + 6 \cdot 2^n \cdot 3^k$
x_k	$27 + 6 \cdot 2^k$

Тогда известные функции будут:

- $(=) = P_0^2$
- $(0) = f_0^0$

- $(+) = f_0^2$
- $(\cdot) = f_1^2$
- $(') = f_0^1$

Определение. $\ulcorner a_0 a_1 \dots a_{n-1} \urcorner = 2^{\ulcorner a_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner a_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_n^{\ulcorner a_{n-1} \urcorner}$

Определение. $S_0\ S_1\ S_2 = 2^{\ulcorner S_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner S_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_n^{\ulcorner S_n \urcorner}$

Примечание. p_i — i-е простое ($p_1 = 2$)

6.8 Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций

Теорема 6.4. f — рекурсивная функция, тогда f представима в формальной арифметике

Теорема 6.5. Если f представима в формальной арифметике, то она рекурсивна

Теорема 6.6. Если функция представима в формальной арифметике, то она рекурсивна

7 Неполнота, непротиворечивость формальной арифметики

7.1 TODO Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности) и ω-непротиворечивость.

Определение. ω-непротиворечивость. Теория ω-непротиворечива, если для любой формулы $\varphi(x)$:

- если $\vdash \varphi(\overline{0}), \vdash \varphi(\overline{1}), \dots$, то $\nvdash \exists x. \neg\varphi(x)$

Лемма 6. *Если теория ω-непротиворечива, то непротиворечива*

7.2 Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Примечание. Subst — функция которая подставляет аргументы в формулу

Примечание. χ — формула формальной арифметики

$$W_1(\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner p \urcorner) = \begin{cases} 0 & \text{если } p \text{ — доказательство } \chi[x_0 \coloneqq \overline{\ulcorner \chi \urcorner}] \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Реализация W_1 через Subst очевидна, тогда W_1 представима в формальной арифметике формулой ω_1. $\sigma(x) = \forall p. \neg\omega_1(x, p)$ — “самоприменение x недоказуемо“

$$\vdash^? \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$$

Теорема 7.1 (Геделя о неполноте арифметики №1)**.**

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$
2. Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$

7.3 Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера

Теорема 7.2 (Геделя о неполноте арифметики №1 в форме Россера)**.**

$$W_2(x, p) = \begin{cases} 0 & \text{если } p \text{ — доказательство } \neg x(\overline{\ulcorner x \urcorner}) \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

ω_2 — формула соответствующая W_2

$$\rho(x) = \forall p. \omega_1(x, p) \to \exists q. q < p \& \omega_2(x, q)$$

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$
2. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$

7.4 Неполнота арифметики

Следствие 7.2.3. Формальная арифметика со стандартной интерпретацией неполна

7.5 Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$

Определение.

$$\text{Consis} \equiv \forall p.\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p)$$

π — формула соответствующая $Proof(x, p)$, т.е. p — доказательство x

Теорема 7.3 (Геделя о неполноте арифметики №2)**.**

$$\vdash \text{Consis} \to \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$$

Т.е. если докажем, что если формальная арифметика непротиворечива, то автоматически $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, т.е. ФА противоречива

Следствие 7.3.4. Никакая теория, содержащая формальную арифметику, не может доказать свою непротиворечивость

7.6 Неформальное пояснение метода доказательства

Схема. Прочтем что написано в теореме: $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ раскрывается в $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$, т.е. если формальная арифметика непротиворечива, то не существует p, который доказывает $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, а это в точности утверждение теоремы Геделя о неполноте №1. Т.е. эта теорема — формализация теоремы Геделя о неполноте №1. $\square$

8 Теория множеств

Определение. Теория множеств — теория первого порядка с нелогическим предикатом ‘принадлежность‘ ($\in$) и следующими аксиомами и схемами аксиом.

8.1 Определения равенства

Определение. B – **бинарное отношение** на X: $B \subseteq X^2$

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\text{snd}\,\langle a, b \rangle = \bigcup\left(\bigcup \langle a, b \rangle \setminus \bigcap \langle a, b \rangle\right) = \{b\}$$

$$\text{fst}\,\langle a, b \rangle = \bigcup\left(\bigcap \langle a, b \rangle\right) = \{a\}$$

Определение. $a \subseteq b$, если $\forall x.x \in a \to x \in b$

Определение. $a = b$, если $a \subseteq b \& b \subseteq a$

8.2 Аксиоматика Цермело-Френкеля

Определение. “Предикат“ $P(x)$ — множество $\{x \big| P(x)\}$

Аксиома 1 (равенства)**.** *Равные множества содержатся в одних и тех же множествах*

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b \& a \in c \to b \in c$$

Аксиома 2 (пустого множества)**.** *Существует* $\varnothing$*:* $\forall x.\neg x \in \varnothing$

Аксиома 3 (пары)**.** *Если* $a \neq b$*, то* $\{a, b\}$ *— множество*

$$\forall a.\forall b.a \neq b \to \exists p.a \in p \& b \in p \& \forall t.t \in p \to t = a \vee t = b$$

Аксиома 4 (объединения)**.** *Если* x *— непустое множество, то* $\bigcup x$ *— множество*

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \& s \in x$$

Аксиома 5 (Степени)**.** *Для множества* x*, существует* $\mathcal{P}(x)$ *— множество всех подмножеств*

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Аксиома 6 (Схема аксиом выделения)**.** *Если* a *— множество,* $\varphi(x)$ *— формула, в которую не входит свободно* b*, то* $\{x \big| x \in a \& \varphi(x)\}$ *— множество*

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow y \in x \& \varphi(y)$$

8.3 Частичный, линейный, полный порядок

8.3.1 Упорядоченность

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивнре

Определение. Отношение порядка (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

Определение. Линейный порядок — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

Определение. Полный порядок — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. $\mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество

Пример. $\mathbb{R}$ — не вполне упорядоченной множество

- $(0, 1)$ не имееи наименьшего
- $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего

8.4 Ординальные числа, аксиома бесконечности

Аксиома 7 (Аксиома бесконечности)**.** *Существуют множества* N*, такие, что*

$$\varnothing \in N \& \forall x.x \in N \to x \cup \{x\} \in N$$

Определение. $a' = a \cup \{a\}$

Определение. Ординальные числа

- $\overline{0} = \varnothing$
- $\overline{1} = \varnothing' = \{\varnothing\}$
- $\overline{2} = \varnothing'' = \{\varnothing\}' = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\dots$

Пример.

$$\omega = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Очевидно, что $\omega \subseteq N$ (из аксиомы бесконечности)

Теорема 8.1. ω — множество

8.5 Схема доказательства существования ординала ω, операции над ординалами, доказательство $1+\omega \neq \omega+1$

Определение.

$$a+b = \begin{cases} a & b=0 \\ (a+c)' & b=c' \\ \sup\limits_{c\in b}(a+c) & \text{если } b \text{ — предельный} \end{cases}$$

Определение.

$$a\cdot b = \begin{cases} 0 & b=0 \\ a\cdot c+a & b=c' \\ \sup_{c\leq b}\{a\cdot c\} & b \text{ — предельный} \end{cases}$$

Определение. $\sup t$ — минимальный ординал, содержащий все элементы из t

Пример.

$$1+\omega = \sup_{c\in\omega}(1+c) = \sup\{0+1, 1+1, 2+1, \dots\}$$

$$\sup\{1,2,3,4,5,\dots\} = \omega$$

Пример.

$$\omega+1 = \omega' = \omega\cup\{\omega\} = \{0,1,2,3,\dots,\omega\}$$

8.6 Связь ординалов и упорядочений

Определение. Множество S **транзитивно**, если

$$\forall a.\forall b.a\in b\& b\in S\to a\in S$$

Определение. Множество S **вполне упорядочено** отношением $\in$, если

1. $\forall a.\forall b.a\neq b\& a\in S\& b\in S\to a\in b\vee b\in a$ — линейный
2. $\forall t.t\subseteq S\to\exists a.a\in t\&\forall b.b\in t\to b=a\vee a\in b$ — в любом подмножестве есть наименьший элемент

Определение. **Ординал** (Ординальное число) — вполне упорядоченное отношением $\in$, транзитивное множество

Определение. **Предельный ординал** $s\neq\varnothing$ — ординал, не имеющий предшественника

$$\forall p.p'\neq s$$

9 Кардинальные числа

9.1 мощность множеств

Определение. **Равномощность** $|a|=|b|$, если существует биекция $a\to b$

Определение. **Строго большая мощность** $|a|>|b|$, если существует $f:b\to a$ — инъекция, но не биекция

Определение. **Кардинальное число** t — ординал x: для всех $y\in x$: $|y|\neq|x|$

Определение. Мощность множества $|x|$ — такое кардинальное число t, что $|t|=|x|$

9.2 Теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), теорема Кантора

Примечание.

- $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots$ — конечные кардиналы
- $\aleph_0 = |\omega|$
- $\aleph_1$ — следующий кардинал за $\aleph_0$

Теорема 9.1 (Кантора)**.** Рассмотрим S — множетво, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех подмножеств
Тогда $|\mathcal{P}(S)| > |S|$

Теорема 9.2 (Кантора-Бернштейна)**.** Если a, b — множества, $f : a \to b$, $g : b \to a$ — инъективны
Тогда существует биекция $a \to b$

9.3 Аксиома выбора, теорема Диаконеску (формулировка)

9.3.1 Аксиома выбора

Аксиома 8.

- На любом семействе непустых множеств $\{A_S\}_{S \in \mathbb{S}}$ можно определить функцию $f : \mathbb{S} \to \bigcup_S A_S$, которая по множеству возвращает его элемент
- Любое множество можно вполне упорядочить
- Для любой сюрьективной функции $f : A \to B$, найдется частично обратная $g : B \to A$, $g(f(x)) = x$

Определение. Дизъюнктное семейство множество — семейство непересекающихся множеств

$$D(y) :\ \forall p.\forall q.p \in y \& q \in y \to p \cap q = \varnothing$$

Определение. Прямое произведение дизъюнктного множества

$$\bigtimes S = \{t \big| \forall p.p \in S \leftrightarrow \exists! c.c \in p \& c \in t\}$$

Аксиома 8. Если $D(y) \& \forall t.t \in y \to t \neq \varnothing$, то $\bigtimes y \neq \varnothing$

Теорема 9.3 (Диаконеску)**.** Рассморим ZF(аксиоматика Цермело-Френкеля) поверх ИИП. Если добавим аксиому выбора то $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

9.4 Аксиома фундирования

9.4.1 Аксиома фундирования

Аксиома 9.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \& y \cap x = \varnothing$$

В каждом непустом множестве есть элемент, не пересекающийся с ним

9.5 Схема аксиом подстановки

9.5.1 Схема аксиом подстановки

ZFC — Zemelo-Frenkel Choice
Аксиома 10. S — множество, f — функция, то $f(S)$ — множество, т.е. существует формула $\varphi(x, y)$:

$$\forall x \in S.\exists! y.\varphi(x, y)$$

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x & p(x) \\ \varnothing & \neg p(x) \end{cases}$$

$$\{x \in S | p(x)\} = \cup f(S)$$

9.6 Теорема Лёвенгейма-Сколема (формулировка), парадокс Сколема

9.6.1 Теорема Левенгейма-Сголема

Определение. Мощность модели

- D — предметное множество

Тогда $|D|$ — мощность модели

Определение. Пусть есть две модели M, M'. M' — **элементарная подмодель** M, если

- предметное множество $M' \subseteq$ предметное множество M
- пусть $\vDash_M \varphi$, тогда $\vDash_{M'} \varphi$
- Все функции и предикаты M' — сужение соответствующих функций и предикатов из M

Теорема 9.4. Пусть задана теория и модель M. Все ее формулы образуют множество T
Тогда для нее существует элементарная подмодель M'

$$|M'| = \max(|T|, \aleph_0)$$

Доказательство. $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ — предметные множества. $D_i \subseteq D$
$D' = \bigcup D_i$ — ?? предметное множество
Рассмотрим все формулы из T
Определим операцию преобразования D:

$$\varphi \in T \quad \underset{y, x_i \in D_n}{[\![\varphi(y, x_1, \ldots x_k)]\!]} = \text{И}$$

$\boxed{\text{Доделать}}$ ∎

Примечание. **"Парадокс" Сколема**
Известно, что:

1. вещественные числа + матан — счетно-аксиоматизированны
2. $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ — внутри теории, на предметном языке
3. У вещественных чисел есть счетная модель $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ — по теореме — вне теории, на метаязыке