Коллоквиум 1

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Топология

1.1 Топологическое пространство, открытое и замкнутое множество

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

1.2 Внутренность и замыкание множества

Определение.
$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \big| w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

Определение. **Замыкание** X — $\overline{X} = \text{наим.}\{A \notin \Omega \big| X \subseteq A\}$

1.3 Топология стрелки

Теорема 1.1.

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \to b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — алгебра Гейтинга

1.4 Дискретная топология

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра

1.5 Топология на частично упорядоченном множестве

Топология на частично упорядоченном множестве $\langle \Omega, \leq \rangle$ — булева алгебра, где Ω — дискретная топология

1.6 Индуцированная топология

Определение. Индуцированная топология на подпространстве $\langle X, \Omega \rangle$ — топлогия. Пусть $Y \subset X$. Определим Ω_Y — семейство подмножеств Y так:

$$\Omega_Y = \{U \cap Y \big| U \in \Omega\}$$

Ω_Y — индуцированная топология на подпространстве Y.

1.7 Связность

Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ **связно**, если нет таких открытых множеств A и B, что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \varnothing$

2 Исчисление высказываний

2.1 Метапеременные, пропозициональные переменные, Высказывания

2.1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
   A_i' — большая буква начала латинского алфавита
2. Связки
   $\underbrace{\alpha}_{\text{метапеременная}}, \beta$ — высказывания
   Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания

2.1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ — метапеременные для выражений
- X, Y, Z — метапеременные для предметных переменные

Метавыражение: $\alpha \to \beta$
Предметное выражение: $A \to (A \to A)$ (заменили α на A, β на $(A \to A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

2.2 Схемы аксиом, доказуемость

2.2.1 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответсвующая определению высказывания, с:

- метапеременными $\alpha, \beta, \dots$

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

2.3 Правило Modus Ponens, доказательство, вывод из гипотез

2.3.1 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где α_i:

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Пример. $\vdash A \to A$

1	$A \to A \ \to A$	(схема аксиом 1)
2	$A \to (A \to A) \to A$	(схема аксиом 1)
3	$(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(схема аксиом 2)
4	$(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(M.P. 1 и 3)
5	$A \to A$	(M.P. 2 и 4)

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$

2.4 Множество истинностных значений, модель (оценка перменных), Оценка высказывания

2.4.1 Теория моделей

- $\mathcal{P}$ — множество предметных переменных
- $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to V$, где $\mathcal{T}$ — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истиностных значений

1. $[\![x]\!] : \mathcal{P} \to V$ — задается при оценке $[\![]\!]^{A:=v_1, B:=v_2}$:
   - $\mathcal{P} = v_1$

- $\mathcal{P} = v_2$

2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \underbrace{\star}_{\substack{\text{определенно} \\ \text{ественным образом}}} [\![\beta]\!]$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \rightarrow]$

Пример.

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} \rightarrow [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = \text{И} \rightarrow \text{И} = \text{И}$$

Также можно записать так:

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}} = f_{\rightarrow}([\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}}, [\![A]\!]^{A:=\text{И},B:=\text{Л}}) = f_{\rightarrow}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

, где $f_{\rightarrow}$ определена так:

a	b	$f_{\rightarrow}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

2.5 Общезначимость

Пример. $\models \alpha$ — α общезначимо

2.6 Выполнимость

Существует оценка, при которой высказывание истинно

2.7 Невыполнимость

Отрицание выполнимости

2.8 Следование

Определение. Следование: $\Gamma \models \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$
- Всегда когда все $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, то $[\![\alpha]\!] = \text{И}$

2.9 Корректность

Определение. ~~Теория~~ Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$

2.10 Полнота

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$

2.11 Противоречивость

Определение. Множество формул Γ **противоречиво**, если для некоторой формулы α имеем $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$

2.12 Теорема о дедукции

Теорема 2.1 (о дедукции)**.** $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

2.13 Теорема о корректности

Теорема 2.2 (о корректности)**.** Пусть $\vdash \alpha$
Тогда $\models \alpha$

2.14 Теорема о полноте ИВ

Теорема 2.3 (о полноте)**.** Пусть $\vDash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

3 Интуиционистское исчисление высказываний

Отличается от ИВ 10-ой схемой аксиом: вместо $\neg\neg\alpha \to \alpha$ стало $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$

3.1 Закон исключенного третьего

$$\vdash A \vee \neg A$$

3.2 Закон снятия двойного отрицания

$$\vdash \neg\neg A \to A$$

3.3 Закон Пирса

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

3.4 BHK-интерпретация логических связок

3.4.1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b, что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$
Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если нет, то OK
- Если да, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

BHK-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить α в β
- $\perp$ — конструкция без построения $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

3.5 Теорема Гливенко

Теорема 3.1. Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуицонистской как $\vdash_{\text{и}}$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$

3.6 Решетка

Определение. Фиксируем A
Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение
Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \le b \vee b \le a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \le x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \le k$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b: $\{x \big| a \le x \& b \le x\}$

- **Множество нижних граней** a и b: $\{x \big| x \leq a \& x \leq b\}$

Определение.

- $a + b$ — нименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. Решетка $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для каждых a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

3.7 Дистрибутивная решетка

Определение. Дистрибутивная решетка если всегда $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Лемма 1. *В дистрибутивной решетке* $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

3.8 Импликативная решетка

Определение. Псевдодополнение $a \to b =$ наиб.$\{c \big| a \cdot c \leq b\}$

Определение. Импликативная решетка — решетка, где для любых a, b есть $a \to b$

Определение. $\mathbf{0}$ — наименьший элемент решетки, $\mathbf{1}$ — наибольший элемент решетки

Лемма 2. *В импликативной решетке всегда есть* 1.

Лемма 3. *Импликативная решетка дистрибутивна*

3.9 Алгебра Гейтинга

Определение. Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга) — импликативная решетка с 0

Теорема 3.2. Любая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

Пример. см. 1.3

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$
- $\varphi(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathfrak{B}}$

Теорема 3.3. $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g: оценки ИИВ
- f: ИИВ $\to \mathfrak{A}$
- g: ИИВ $\to \mathfrak{B}$

φ согласована с f, g, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 3.4. если $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ согласована с f, g и оценка $[\![\alpha]\!]_g \neq 1_{\mathfrak{B}}$, то $[\![\alpha]\!]_f \neq 1_{\mathfrak{A}}$

Теорема 3.5. Алгебра Гейтинга — полная модель ИИВ

3.10 Булева алгебра

Определение. Булева алгебра — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

Пример. см. 1.4

Пример.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

- $a \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot b = b$
- $a \cdot b = 0$
- $a + b = 1$
- $a \to b = \text{наиб.}\{x \big| a \cdot x \le b\} = b$
  $\{x \big| a \cdot x \le\} = \{0, b\}$
- $a \to 1 = 1$
- $a \to 0 = 0$

Можем представить в виде пары $\langle x, y \rangle$

- $a = \langle 1, 0 \rangle$
- $b = \langle 0, 1 \rangle$
- $1 = \langle 1, 1 \rangle$
- $0 = \langle 0, 0 \rangle$

Теорема 3.6. Любая булева алгебра — модель КИВ

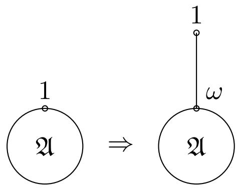
3.11 Геделева алгебра

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

3.12 Операция $\Gamma(A)$

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



   Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ переименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

Теорема 3.7.

- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — Геделева

3.13 Алгебра Линденбаума

Определение. X — все формулы логики

- $\alpha \le \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_{\approx} = \{\gamma \big| \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности
- $X/_{\approx} = \{[\alpha]_{\approx} \big| \alpha \in X\}$

$\langle X/_{\approx}, \le \rangle$ — алгебра Гейтинга

Свойство 1. $\langle X/_{\approx}, \le \rangle$ *— алгебра Линденбаума, где* $X, \approx$ *— из интуиционистской логики*

3.14 Свойство дизъюнктивности ИИВ

Определение. **Дизъюнктивность** ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Теорема 3.8. ИИВ дизъюнктивно

3.15 Свойство нетабличности ИИВ

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- V — множество истинностных значений
  $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{V} : V^2 \rightarrow V$, $f_{\neg} : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $[\![p_i]\!] \in V$ $f_{¶} : p_i \rightarrow V$
- $[\![p_i]\!] = f_{¶}(p_i)$
  $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_{\star}([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$
  $[\![\neg\alpha]\!] = f_{\neg}([\![\alpha]\!])$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $[\![\alpha]\!] = T$, при любой $f_{¶}$

Теорема 3.9. У ИИВ не существует полной конечной табличной модели

3.16 Модель Крипке, Вынужденность

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times ¶$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_k \Vdash p$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
   Тогда $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
4. $W_i \Vdash \neg\alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i: $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 3.10. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\vDash \alpha$

Теорема 3.11. ИИВ корректна в модели Крипке

4 Исчиление предикатов

4.1 Предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные

Определение. Язык исчисления предикатов

- логические выражения "предикаты"/"формулы"
- предметные выражния "термы"

Θ — метаперменные для термов
Термы:

- Атомы:
  - $a, b, c, d, \dots$ — предметные переменные
  - x, y, z — метапеременные для предметных перменных
- Функциональные Символы
  - f, g, h — Функциональные символы(метаперемнные)
  - $f(\Theta_1, \dots \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:
  Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок
  - P — метаперменные для предикатных символов
  - A, B, C — предикатный символ
  - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
  - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
  - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
    "<квантор> <переменная>.<выражение>"

4.1.1 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множетво
2. Кажодму $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \rightarrow D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^2 \rightarrow V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y.\ E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $[\![x]\!] = f_{x_i}$
- $[\![\alpha \star \beta]\!]$ — смотри ИИВ
- $[\![P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{P_i}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $[\![f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n)]\!] = f_{f_j}([\![\Theta_1]\!], \dots, [\![\Theta_n]\!])$
- $$[\![\forall x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } [\![\varphi]\!]^{f_x = k} = \text{И при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

- $$[\![\exists x.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И} & \text{, если } [\![\varphi]\!]^{f_x=k} = \text{И при некотором } k \in D \\ \text{Л} & \text{, иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall x.\forall y.E(x,y)]\!] = \text{Л}$$

т.к. $[\![E(x,y)]\!]^{x:=1,\ y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall \boxed{\varepsilon > \boxed{0}}\ \exists N\ \forall \boxed{\boxed{\text{n}} > \boxed{\text{N}}}\quad \boxed{\boxed{|a_n - a|} < \boxed{\varepsilon}}$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \to \exists N.\forall n.(n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a,b) = G(a,b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_|(a)$
- $(-)(a,b) = m_-(a,b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall e.\boxed{\text{G}(\boxed{\text{e}}, \boxed{\text{m}_0})} \to \exists n_0.\forall n.\boxed{\text{G}(\text{n}, \text{n}_0)} \to \boxed{\text{G}\Big(\text{e}, \boxed{\text{m}_|\Big(m_-\big(m_a(n), a\big)\Big)}\Big)}$$

4.2 Свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу

4.2.1 Вхождение

Пример.

$$(P(\underset{1}{x}) \vee Q(\underset{2}{x})) \to (R(\underset{3}{x}) \& (\underbrace{\forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по пермененной 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

α_1 $x = 0 \to x = 0$

α_2 $(\exists x.x = 0) \to (x = 0)$ — не доказано

α_2' $(\exists t.x = 0) \to (x = 0)$ — (правило $\exists$)

Пример.

(n) $x = 0 \to y = 0$ — откуда то

$(n+1)$ $(\exists x.x = 0) \to (y = 0)$ — (правило $\exists$)

4.2.2 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая свободная перменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ"

Пример.

$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

Пример.

$$(P(x) \vee \forall x.P(x))[x := y] \equiv P(y) \vee \forall x.P(x)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{y}_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в Θ. Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y + z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

4.3 Свобода для подстановки, Правила вывода для кванторов, аксиомы исчисления предикатов для кванторов, оценки и модели в исчислении предикатов

4.3.1 Теория доказательств

Все аксимомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \to \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ.

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```
int y;
int f(int x) {
        x = y;
}
```

Заменим `y := x`. Код сломается, т.к. у нас нет свобод для подстановки

(Правило $\forall$)

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x.\psi}$$

(Правило $\exists$)

$$\frac{\psi \to \varphi}{(\exists x.\psi) \to \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \to x^2 = 25}{x = 5 \to \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\exists y.x = y$$

$$\forall x.\exists y.x = y \to \exists y.y + 1 = y$$

Делаем замену `x := y+1`. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора $\exists$ и поэтому свободная переменная x стала связанная.

4.4 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема 4.1. Пусть задана Γ, α, β

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если в доказательстве $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в α
2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

4.5 Теорема о корректности для исчисления предикатов

Определение (Условие для корректности)**.** Правила для кванторов по свободным перменным из Γ запрещены.
Тогда $\Gamma \vdash \alpha$ влечет $\Gamma \vDash \alpha$

4.6 Полное множество (бескванторных) формул

Определение. Γ — **непротиворечивое** множество формул, если $\Gamma \nvdash \alpha \& \neg\alpha$ ни при каком α

Определение. Полное непротиворечивое замкнутых бескванторных формул — такое, что для каждой замкнутой бескванторной формулы α: либо $\alpha \in \Gamma$, либо $\neg\alpha \in \Gamma$

Теорема 4.2. Если Γ — непротиворечивое множество з.б. фомул и α — з.б. формула.
То либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ — непр. мн. з.б. формул

Теорема 4.3. Если Γ — непр. мн. з.б. фомул, то можно построить Δ — полное непр. мн. з.б. формул. $\Gamma \subseteq \Delta$ и в языке — счетное количество формул

Определение. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — формулы з.б.

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ либо $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi_1\}$ — смотря что непротиворечивое
- $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\varphi_2\}$ либо $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi_2\}$

$$\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$$

Свойство 2. Γ^* *— полное*

Свойство 3. Γ^* *— непротиворечивое*

Теорема 4.4. Любое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул Γ имеет модель, т.е. существует оценка $[\![]\!]$: если $\gamma \in \Gamma$, то $[\![\gamma]\!] = И$

Теорема 4.5. Если Γ_i — непротиворечиво, то Γ_{i+1} — непротиворечиво

Теорема 4.6. $\Gamma*$ — непротиворечиво

Следствие 4.6.1. $\Gamma^{\triangle} = \Gamma*$ без формул с $\forall, \exists$

Определение. Предваренная нормальная форма — формула, где $\forall\exists\forall \dots (\tau)$, τ — формула без кванторов

Теорема 4.7. Если φ — формула, то существует ψ — в п.ф., то $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$

4.7 Модель для формулы

Определение. Моделью для непротиворечивого множества замкнутых бескванторных формул Γ — такая модель, что каждая формула из Γ оценивается в И

4.8 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема 4.8 (Геделя о полноте)**.** Если Γ — полное неротиворечивое множество замкнутых(не бескванторных) фомул, то оно имеет модель

Теорема 4.9 (Геделя о полноте ИП)**.** У любого н.м.з.ф. (непротиворечивого множества замкнутых формул) ИП существует модель

4.9 Следствие из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов

Следствие 4.9.2. Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

4.10 Неразрешимость исчисления предикатов (формулировка, что такое неразрешимость).

Определение. **Язык** — множество слов. Язык $\mathcal{L}$ разрешим, если существует A — алгоритм, что по слову w:
$A(w)$ — останавливается в ‘1‘, если $w \in \mathcal{L}$ и ‘0‘, если $w \notin \mathcal{L}$

Примечание. Проблема останова: не существует алгоритма, который по программе для машина Тьюринга ответит, остановится она или нет.
Пусть $\mathcal{L}'$ — язык всех останов программы для машины Тьюринга. $\mathcal{L}'$ неразрешим

Теорема 4.10. ИП неразрешимо

5 Арифметика и теории первого порядка

5.1 Теория первого порядка

Определение. **Теория I порядка** — Исчесление предикатов + нелогические функции + предикатные символы + нелогические (математические) аксиомы.

5.2 Модели и структуры теорий первого порядка

Назовём **структурой** теории первого порядка такую модель исчисления предикатов, что для всех нелогических функциональных и предикатных символов теории в ней задана оценка. Назовём **моделью** теории первого порядка такую структуру, что все нелогические аксиомы данной теории в ней истинны.

5.3 Аксиоматика Пеано

Определение. Будем говорить, что N соответсвует **аксиоматике Пеано** если:

- задан $(')$: $N \to N$ — инъективная функция (для разных элементов, разные значения)
- задан $0 \in N$: нет $a \in N$, что $a' = 0$
- если $P(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от $x \in N$, такое, что $P(0)$ и всегда, когда $P(x)$, также и $P(x')$. Тогда $P(x)$

5.4 Определение операций (сложение, умножение, возведение в степень)

Определение.

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a + c)' & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ (a^c) \cdot a & b = c' \end{cases}$$

5.5 Формальная арифметика (язык, схема аксиом индукции и общая характеристика остальных аксиом).

5.5.1 Формальная арифметика

Определение. Исчесление предикатов:

- Функциональные символы:
  - 0 — 0-местный
  - $(')$ — 1-местный
  - $(\cdot)$ — 2-местный
  - $(+)$ — 2-местный
- $(=)$ — 2-местный предикатный символ

Аксимомы:

1. $a = b \to a' = b'$
2. $a = b \to a = c \to b = c$
3. $a' = b' \to a = b$
4. $\neg a' = 0$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a \cdot 0 = 0$
8. $a \cdot b' = a \cdot b + a$
9. Схема аксиом индукции:

$$(\psi[x := 0])\&(\forall x.\psi \to (\psi[x := x'])) \to \psi$$

x входит свободно в ψ

Свойство 1.

$$((a + 0 = a) \to (a + 0 = a) \to (a = a))$$

Доказательство.

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$
$$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c) \to \forall b.\forall c.(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$$
$$\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c$$
$$(\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c) \to \forall c.(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c)$$
$$\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$$
$$(\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c) \to a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$
$$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$
$$a + 0 = a$$
$$a + 0 = a \to a = a$$
$$a = a$$
$$\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$
$$(0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0)$$
$$(\forall b.\forall c.a = b \to a = c\ tob = c) \to (0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0) \to \phi$$

Исправить

□

Определение. $\exists!x.\varphi(x) \equiv (\exists x.\varphi(x))\&\forall p.\forall q.\varphi(p)\&\varphi(q) \to p = q$
Можно также записать $\exists!x.\neg\exists s.s' = x$ или $(\forall q.(\exists x.x' = q) \vee q = 0)$

Определение. $a \leq b$ — сокращение для $\exists n.a + n = b$

Определение.

$$\overline{n} = 0^{(n)}$$
$$0^{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0^{(n-1)'} & n > 0 \end{cases}$$