Лекция 9

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Теория первого порядка

Определение. **Теория I порядка** — Исчесление предикатов + нелогические функции + предикатные символы + нелогические (математические) аксиомы.

Определение. Будем говорить, что N соответсвует **аксиоматике Пеано** если:

- задан $(')$: $N \to N$ — инъективная функция (для разных элементов, разные значения)
- задан $0 \in N$: нет $a \in N$, что $a' = 0$
- если $P(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от $x \in N$, такое, что $P(0)$ и всегда, когда $P(x)$, также и $P(x')$. Тогда $P(x)$

Свойство 1. 0 *единственный*

Доказательство. $P(x) = x = 0$ либо существует $t: \; t' = x$

- $P(0) : 0 = 0$
- $P(x) \to P(x')$. Заметим, что x' — не ‘ноль‘

$P(x)$ выполнено при всех $x \in N$ □

Определение.

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a+c)' & b = c' \end{cases}$$

Можем определить это опираясь на доказательтво

Определение.

- $1 = 0'$
- $2 = 0''$
- $3 = 0'''$
- $4 = 0''''$
- ...

Задача 1. $2 + 2 = 4$

Решение.

$$2 + 2 = 0'' + 0'' = (0'' + 0')' = ((0'' + 0)')' = ((0'')')' = 0'''' = 4$$

Определение.

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$$

Определение.

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = 0 \\ (a^c) \cdot a & b = c' \end{cases}$$

Свойство 1. $a + 0 = 0 + a$

Доказательство. $P(a) = (a + 0 = 0 + a)$
База $P(0) : 0 + 0 = 0 + 0$
Переход $P(x) \to P(x')$

$$x + 0 = 0 + x$$
$$x' + 0 \stackrel{?}{=} 0 + x'$$
$$0 + x' = (0 + x)' \quad \text{определение } +$$
$$(0 + x)' = (x + 0)' \quad \text{предположение}$$
$$(x + 0)' = x' \quad \text{определение } +$$
$$x' = x' + 0 \quad \text{определение } +$$

□

Свойство 2. $a + b' = a' + b$

Доказательство.

$b = 0$ $a + 0' = a' + 0$

$$a' = (a + 0)' = a + 0' = a' + 0 = a'$$

$b = c'$ Есть: $a + c' = a' + c$. Покажем: $a + c'' = a' + c'$

$$(a + c')' = (a' + c)' = a' + c$$

□

Свойство 3. $a + b = b + a$

Доказательство. База $b = 0$ — свойство
Переход $a + c'' = c'' + a$, если $a + c' = c' + a$

$$a + c'' = (a + c')' = (c' + a)' = c' + a' = c'' + a$$

□

1.1 Формальная арифметика

Определение. Исчесление предикатов:

- Функциональные символы:
  - 0 — 0-местный
  - $(')$ — 1-местный
  - $(\cdot)$ — 2-местный
  - $(+)$ — 2-местный
- $(=)$ — 2-местный предикатный символ

Аксимомы:

1. $a = b \to a' = b'$
2. $a = b \to a = c \to b = c$

3. $a' = b' \to a = b$
4. $\neg a' = 0$
5. $a + b' = (a + b)'$
6. $a + 0 = a$
7. $a \cdot 0 = 0$
8. $a \cdot b' = a \cdot b + a$
9. Схема аксиом индукции:

$$(\psi[x := 0])\&(\forall x.\psi \to (\psi[x := x'])) \to \psi$$

x входит свободно в ψ

Свойство 1.

$$((a + 0 = a) \to (a + 0 = a) \to (a = a))$$

Доказательство.

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$
$$(\forall a.\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c) \to \forall b.\forall c.(a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c)$$
$$\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c$$
$$(\forall b.\forall c.a + 0 = b \to a + 0 = c \to b = c) \to \forall c.(a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c)$$
$$\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c$$
$$(\forall c.a + 0 = a \to a + 0 = c \to a = c) \to a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$
$$a + 0 = a \to a + 0 = a \to a = a$$
$$a + 0 = a$$
$$a + 0 = a \to a = a$$
$$a = a$$
$$\forall b.\forall c.a = b \to a = c \to b = c$$
$$(0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0)$$
$$(\forall b.\forall c.a = b \to a = c\ tob = c) \to (0 = 0 \to 0 = 0 \to 0 = 0) \to \phi$$

Исправить ∎

Определение. $\exists!x.\varphi(x) \equiv (\exists x.\varphi(x))\&\forall p.\forall q.\varphi(p)\&\varphi(q) \to p = q$
Можно также записать $\exists!x.\neg\exists s.s' = x$ или $(\forall q.(\exists x.x' = q) \vee q = 0)$

Определение. $a \le b$ — сокращение для $\exists n.a + n = b$

Определение.

$$\overline{n} = 0^{(n)}$$
$$0^{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0^{(n-1)'} & n > 0 \end{cases}$$

1.2 Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике

Определение. $W \subseteq \mathbb{N}_0^n$. W — выразимое в формальной арифметике. отношение, если существует формула ω со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$

- $(k_1, \ldots, k_n) \in W$, тогда $\vdash \omega[x_1 := \overline{k_1}, \ldots, x_n := \overline{k_n}]$
- $(k_1, \ldots, k_n) \notin W$, тогда $\vdash \neg\omega[x_1 := \overline{k_1}, \ldots, x_n := \overline{k_n}]$

$$\omega[x_1 := \Theta_1, \ldots, x_n := \Theta_n] \equiv \omega(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$$

Определение. $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — представим в формальной арифметике, если найдется φ — фомула с $n + 1$ свободными переменными $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$

- $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$, то $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_{n+1}})$
- $\vdash \exists!x.\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, x)$