Лекция 8

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Исчисление предиктов

Теорема 1.1 (Геделя о полноте ИП)**.** У любого н.м.з.ф. (непротиворечивого множества замкнутых формул) ИП существует модель

Теорема 1.2. Если формула φ — замкнутая формула ИП
Тогда найдется ψ — замкнутая формула ИП, что $\vdash \varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$. ψ — с поверхностными кванторами

Доказательство. См. ДЗ □

Примечание. Рассмотрим Γ — н.м.з.ф. — рассмотрим Γ' — полное расширение Γ. Пусть φ — фомула из Γ', тогда найдется $\psi \in \Gamma'$, что ψ — с поверхностными кванторами и $\vdash \varphi \to \psi$, $\vdash \psi \to \varphi$

Доказательство теоремы Геделя о полноте ИП. Рассмотрим множество констант(нуль местных функциональных символов) — d_j^i. Построим $\{\Gamma_j\}$:

$$\Gamma' = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma 2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_j \subseteq \dots$$

Переход $\Gamma_j \Rightarrow \Gamma_{j+1}$: рассмторим все формулы из Γ_j: $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$

1. γ_i — формула без кванторов — оставим на месте
2. $\gamma_i \equiv \forall x.\varphi$ — добваим к Γ_{j+1} все формулы вида $\varphi[x := \Theta]$, где Θ — составлен из всех ф.с. ИП и констант вида $d_1^k, \dots, d_j^k$
3. $\gamma_i \equiv \exists x.\varphi$ — добавим одну формулу — $\varphi[x := d_{j+1}^i]$

Утв. 1 Γ_{i+1} непр., если Γ_i — непр.
Докажем от противного. $\Gamma_{i+1} \vdash \beta \& \neg\beta$

$$\Gamma_i, \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \beta \& \neg\beta \quad \gamma_i \in \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_i$$

$$\Gamma_i \vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \dots \to \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$$

γ_i — замкнутое $\implies$ т. о дедукции. Докажем что $\Gamma_i \vdash \beta \& \neg\beta$ по индукции.

$$\Gamma_i \vdash \gamma \to \varepsilon$$

Покажем $\Gamma_i \vdash \varepsilon$, т.е. γ получен из $\forall x.\xi$ или $\forall x.\xi \in \Gamma_i$

$(\forall x.\xi)$ Заметим, что $\Gamma_i \vdash \forall x.\xi$

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \text{по условию} \\
\gamma \to \varepsilon & \text{по построению } \Gamma_{i+1} \\
\forall x.\xi \to (\underbrace{\xi[x := \Theta]}_{\gamma}) & \text{(акс. 11)} \\
(\forall x.\xi) \to \varepsilon & \left| \begin{array}{l} \eta \to \xi \\ \xi \to \kappa \end{array} \right. \implies \eta \to \kappa \\
\forall x.\xi & \\
\varepsilon & \text{(M.P.)}
\end{array}$$

$(\exists x.\xi)$

$$\Gamma_i \vdash \overbrace{\xi[x := d^k_{i+1}]}^{\gamma} \to \varepsilon$$

Заметим, что d^k_{i+1} не входит в ε. Заменим все d^k_{i+1} в доказательстве на y — новая переменная

$$\Gamma_i \vdash \xi[x := y] \to \varepsilon$$

$\exists y.\xi[x := y] \to \varepsilon$
$(\exists x.\xi x) \to (\exists t.\xi[x := y])$
$(\exists x.\xi) \to \varepsilon$
$\exists x.\xi$

Исправить

Утв. 2 Γ^* — непр. $\Gamma_0 \vdash \gamma_1 \to \dots \to \gamma_n \to \beta \& \neg\beta$

$$\Gamma_{\max_i(0..n)} \vdash \beta \& \neg\beta$$

Значит $\Gamma_{\max}$ — противоречиво, $\Gamma^{\triangle} = \Gamma^*$ без кванторов
Значит у $\Gamma^{\triangle}$ есть модель M

Утв. 3 $\gamma \in \Gamma'$, то $[\![\gamma]\!]_M = \text{И}$
Индукция по количеству кванторов в γ. Рассмторим:

1. $\gamma \equiv \forall x.\delta$
$[\![\forall x.\delta]\!]$, если $[\![\delta]\!]^{x:=\kappa} = \text{И}, \kappa \in D$. Рассмотри $[\![\delta]\!]^{x:=\kappa}$, $k \in D$. κ содержит константы и ф-с, κ осмысленно Γ_p. δ добавлена на шаге q. Рассмотрим шаг $\Gamma_{\max(p,q)}$ $\forall x.\delta : \Gamma_{\max(p,q)+1}$ добавлена $\delta[x := \kappa]$. $\delta[x := \kappa]$ — меньше на 1 квантор, $[\![\delta[x := k]]\!] = \text{И}$
2. $\gamma \equiv \exists x.\delta$ — аналогично

$\square$

Теорема 1.3. ИП неразрешимо

Определение. Язык — множество слов. Язык $\mathcal{L}$ разрешим, если существует A — алгоритм, что по слову w:
$A(w)$ — останавливается в '1', если $w \in \mathcal{L}$ и '0', если $w \notin \mathcal{L}$

Примечание. Проблема останова: не существует алгоритма, который по программе для машина Тьюринга ответит, остановится она или нет.
Пусть $\mathcal{L}'$ — язык всех останов программы для машины Тьюринга. $\mathcal{L}'$ неразрешим

Примечание. `[a, b, c, d, e] = cons(a, cons(b, cons(c, cons(d, cons(e, nil)))))`
A — алфавит ленты

$$\left.\begin{array}{l} S_x,\ x \in A \\ e - \text{nil} \end{array}\right\} \text{— 0-местные функциональные символы}$$

$$C(a,b) \text{ — 2-местные функциональные символы}$$

$b_s, s \in \mathcal{S}$ — множество всех состояний, b_0 — начальное состояние.

$$C(s_c, C(s_b, C(s_a, e))) \quad C(s_d, C(s_e, e))$$

Заведем предикат, которых отвечает было ли состояние в процессе. Начальное состояние — машина Тьюринга запущена на строке α:

$$R(\alpha, e, b_0)$$

Переход:

$$(s_x, b_s) \to (s_y, b_t, \leftrightarrow)$$

$$(s_x, b_s) \to (s_y, b_t, \leftarrow)$$

Если пермещение законно, то можем построить для каждого такие правила:

$$\forall z.\forall w.R(C(s_x, z), w, b_s) \to R(C(s_y, z), w, b_t)$$

$$\dots R(z, C(s_y, w), b_t)$$

Сделаем коньюнкцию вех эти правил: $R(\dots)\&R(\dots)\&\dots\&R(\dots) \to \exists z.\exists.R(z, w, b_\triangle)$ Исправить

Пример.

1. $R(C(s_k, e), e, b_0)$ — доказуемо(мы так сказали) Двинем голвку вправо:

$$\forall x. \forall y. R(C(s_k, x), y, b_0) \to R(x, C(s_k, y), b_1)$$