Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Исчисление предикатов

1.1 Расставление скобок

Кванторы имеют наименьший приоритет

Пример.

$$\forall x.A\&B\&y.C\&D \vee \exists z.E$$

$$(\forall x.(A\&B\&\forall y.(C\&D \vee \exists z.(E))))$$

Еще раз про правила только со скобками

1. $$\frac{\varphi \to \psi}{(\exists.\varphi) \to \psi}$$

2. $$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to (\forall x.\varphi)}$$

Пример.

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x.(\varphi \to \psi)}$$

— можно доказать, но это не правило вывода для $\exists$

Определение. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — доказательство

- если α_i — аксимома
- либо существует $j, k < i$, что $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$
- либо существует $\alpha_j :\ \alpha_j = \varphi \to \psi$ и $\alpha_i = (\exists x.\varphi) \to \psi$ причем x не входит свободно в ψ
- либо существует $j : \alpha_j = \psi \to \varphi$ и $\alpha_i = \psi \to \forall x.\varphi$ причем x не входит свободно в ψ

1.2 Вхождение

Пример.

$$(P(\underset{1}{x}) \lor Q(\underset{2}{x})) \to (R(\underset{3}{x})\&(\underbrace{\forall \underset{4}{x}.P_1(\underset{5}{x})}_{\text{область } \forall \text{ по } x}))$$

1, 2, 3 — свободные, 5 — связанное, по перменненой 4

Пример.

$$\underbrace{\forall x.\forall y.\forall x.\forall y.\forall x.P(x)}_{\text{область } \forall \text{ по } x}$$

Здесь x в $P(x)$ связано. x не входит свободно в эту формулу, потому что нет свободных вхождений

Определение. Переменная x входит свободно если существует свободное вхождение

Определение. Вхождение свободно, если не связано

Можно относится к свободно входящим перменным как с перменным из библиотеки, т.е. мы не имеем права их переименовывать

Пример. Некорректная формула

α_1 $x = 0 \to x = 0$

α_2 $(\exists x.x = 0) \to (x = 0)$ — не доказано

α_2' $(\exists t.x = 0) \to (x = 0)$ — (правило $\exists$)

Пример.

(n) $x = 0 \to y = 0$ — откуда то

$(n + 1)$ $(\exists x.x = 0) \to (y = 0)$ — (правило $\exists$)

1.3 Свободные подстановки

Определение. Θ свободен для подстановки вместо x в φ, если никакая свободная перменная в Θ не станет связанной в $\varphi[x := \Theta]$

Определение. $\varphi[x := \Theta]$ — "Заменить все свободные вхождения x в φ на Θ"

Пример.

$$(\forall x.\forall y.\forall x.P(x))[x := y] \equiv \forall x.\forall y.\forall x.P(x)$$

Пример.

$$(P(x) \lor \forall x.P(x))[x := y] \equiv P(y) \lor \forall x.P(x)$$

Пример.

$$(\forall y.x = y)\ [x := \underbrace{y}_{\equiv\Theta}] \equiv \forall y.\underset{1}{y} = y$$

$FV(\Theta) = \{y\}$ — свободные перменные в Θ. Вхождение y с номером 1 стало связанным

Пример.

$$P(x)\&\forall y.x = y\ [x := y + z] \equiv P(y + z)\&\forall y.\underset{1}{y} + z = y$$

Здесь при подстановке вхождение y с номером 1 стало связанным. x — библиотечная функция, переименовали x во что-то другое.

1.4 Пример доказательства

Лемма 1. *Пусть* $\vdash \alpha$*. Тогда* $\vdash \forall x.\alpha$

Доказательство.

1. Т.к. $\vdash \alpha$, то существует $\gamma_1, \ldots, \gamma_2 : \gamma_n = \alpha$

$$\begin{array}{ccc}
(1) & \gamma_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
(n) & \gamma_n (\equiv \alpha) & \\
(n+1) & A\&A \to A & \text{(акс)} \\
(n+2) & \alpha \to ((A\&A \to A) \to \alpha) & \text{(акс)} \\
(n+3) & (A\&A \to A) \to \alpha & \text{(М.Р } n, n+2) \\
(n+4) & (A\&A \to A) \to \forall x.\alpha & \text{(введение } \forall\ n+3) \\
(n+5) & \forall x.\alpha & \text{(М.Р. } n+1, n+4)
\end{array}$$

□

1.5 Теорема о дедукции

Теорема 1.1. Пусть задана Γ, α, β

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, при условии, если в доказательстве $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ не применялись правила для $\forall, \exists$ по перменным, входяшим свободно в α
2. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$