

Лекция 5

Цуя Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

| | |
|--------------------------------|----------|
| 1 Программы | 1 |
| 2 Исчисление предикатов | 2 |
| 2.1 Сокращение записи | 3 |
| 2.2 Теория моделей | 3 |
| 2.3 Теория доказательств | 4 |

1 Программы

программа(функция)

- $P : \alpha \rightarrow \beta$ — берет α , возвращает β
- P — доказательство, что из α следует β

Пример.

```
1 f a = a
```

$f : A \rightarrow A$ — f доказывает что, из A следует A

| логическое исчисление | Типизированное λ -исчисление |
|-----------------------|---|
| логическая формула | тип |
| доказательство | значение |
| доказуемая формула | обитаемый тип(имеет хотя бы один экземпляр) |
| \rightarrow | функция |
| $\&$ | упорядоченная пара |
| \vee | алг. тип(тип-сумма) |

Пример. 5 доказывает `Int`

Пример. Список:

```
1 Type list = Record
2   Nul: boolean;
3   case Nul of
4     True  : ;
5     False : Next: ^list;
6 end;
```

```
1 struct list {
2   *list next;
3 };
```

Если `next == NULL` — то конец

Пример. Дерево:

```

1 struct tree {
2     tree* left;
3     tree* right;
4     int value;
5 };

```

Определение. Отмеченное(дизъюнктивное) объединение множеств:

- A, B — множества
- $A \sqcup B = \{ \langle "A", a \rangle \mid a \in A \} \cup \{ \langle "B", a \rangle \mid a \in B \}$

Пусть $S \in A \sqcup B$. Мы знаем откуда S

```

1 data List a = Nil | Cons a (List a)
2 example = Cons 1 (Cons 2 (Cons 3 Nil)) -- [1; 2; 3]

```

```

1 union {
2     int a;
3     char b;
4 };

```

Пример.

$$\frac{\Gamma \vdash \overset{\text{Nil}}{\alpha} \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \overset{\text{Cons}}{\beta} \rightarrow \gamma \quad \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \underset{\text{int}}{\gamma}}$$

```

1 let rec count l (* α + β *) =
2 match l with
3 | Nil (* α *) -> 0 (* α → int *)
4 | Cons(hd, tl) (* β *) -> 1 + count tl (* β → int *)

```

2 Исчисление предикатов

Определение. Язык исчисления предикатов

- логические выражения “предикаты”/“формулы”
- предметные выражения “термы”

Θ — метапеременные для термов

Термы:

- Атомы:
 - a, b, c, d, \dots — предметные переменные
 - x, y, z — метапеременные для предметных переменных
- Функциональные Символы
 - f, g, h — Функциональные символы(метапеременные)
 - $f(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение функциональных символов
- Логические выражения:

Если $n = 0$, будем писать f, g — без скобок

 - P — метапеременные для предикатных символов
 - A, B, C — предикатный символ
 - $P(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ — применение предикатных символов
 - $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ — Связки
 - $\forall x.\varphi$ и $\exists x.\varphi$ — кванторы
 - “<квантор> <переменная>.<выражение>”

2.1 Сокращение записи

И.В + жадность \forall, \exists

Метавыражение:

$$\forall x.(P(x) \& (\forall y.P(y)))$$

Квантор съедает все что дают, т.е. имеет минимальный приоритет.

Правильный вариант(настоящее выражение):

$$\forall a.B(A) \& \forall b.B(b)$$

2.2 Теория моделей

Оценка формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множество
2. Каждому $f_i(x_1, \dots, x_n)$ сопоставим функцию $D^n \rightarrow D$
3. Каждому $P_j(x_1, \dots, x_m)$ сопоставим функцию(предикат) $D^m \rightarrow V$
4. Каждой x_i сопоставим элемент из D

Пример.

$$\forall x.\forall y. E(x, y)$$

Чтобы определить формулу сначала определим $D = \mathbb{N}$

$$E(x, y) = \begin{cases} \text{И} & , x = y \\ \text{Л} & , x \neq y \end{cases}$$

- $\llbracket x \rrbracket = f_{x_i}$
- $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket$ — смотри ИИВ
- $\llbracket P_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = f_{P_i}(\llbracket \Theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \Theta_n \rrbracket)$
- $\llbracket f_j(\Theta_1, \dots, \Theta_n) \rrbracket = f_{f_j}(\llbracket \Theta_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \Theta_n \rrbracket)$

$$\llbracket \forall x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket^{f_x=k} = \text{И} \text{ при всех } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \exists x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} \text{И} & , \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket^{f_x=k} = \text{И} \text{ при некотором } k \in D \\ \text{Л} & , \text{иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall x.\forall y.E(x, y) \rrbracket = \text{Л}$$

т.к. $\llbracket E(x, y) \rrbracket^{x:=1, y:=2} = \text{Л}$

Пример.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Синим отмечены функциональные конструкции(термы), зеленым предикатные

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0) \rightarrow \exists N.\forall n.(n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначим:

- $(>)(a, b) = G(a, b)$ — предикат
- $|\bullet|(a) = m_1(a)$
- $(-)(a, b) = m_-(a, b)$
- $0() = m_0$
- $a_\bullet(n) = m_a(n)$

$$\forall \varepsilon. G(\varepsilon, m_0) \rightarrow \exists n_0.\forall n. G(n, n_0) \rightarrow G\left(\varepsilon, m_1\left(m_-\left(m_a(n), a\right)\right)\right)$$

2.3 Теория доказательств

Все аксиомы И.В + М.Р.

(схема 11) $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \Theta]$

(схема 12) $\varphi[x := \Theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Если Θ свободен для подстановки вместо x в φ .

Определение. Свободен для подстановки — никакое свободное вхождение x в Θ не станет связанным

Пример.

```

1 int y;
2 int f(int x) {
3     x = y;
4 }
```

Заменим $y := x$. Код сломается, т.к. y нас нет свобод для подстановки

(Правило \forall)

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi}$$

(Правило \exists)

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi}$$

В обоих правилах x не входит свободно в φ

Пример.

$$\frac{x = 5 \rightarrow x^2 = 25}{x = 5 \rightarrow \forall x.x^2 = 25}$$

Между x и x^2 была связь, мы ее разрушили. Нарушено ограничение

Пример.

$$\begin{aligned} & \exists y.x = y \\ \forall x.\exists y.x = y & \rightarrow \exists y.y + 1 = y \end{aligned}$$

Делаем замену $x := y+1$. Нарушено требование свобод для подстановки. y входит в область действия квантора \exists и поэтому свободная переменная x стала связанная.