Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Упорядоченность

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивнре

Определение. Отношение порядка (частичный) — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное

Определение. Линейный порядок — порядок в котором $a \preceq b$ или $b \preceq a$

Определение. Полный порядок — линейный, каждое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. $\mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество

Пример. $\mathbb{R}$ — не вполне упорядоченной множество

- $(0, 1)$ не имееи наименььшего
- $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего

2 Табличные модели

Определение. Назовем модель **табличной** для ИИВ:

- V — множество истинностных значений
  $f_\rightarrow, f_\&, f_V : V^2 \rightarrow V$, $f_\neg : V \rightarrow V$
  Выделенные значения $T \in V$
  $[\![p_i]\!] \in V$ $f_\mathcal{P} : p_i \rightarrow V$
- $[\![p_i]\!] = f_\mathcal{P}(p_i)$
  $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$
  $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$

~~Если $\vdash \alpha$, то~~ $\vDash \alpha$ означает, что $[\![\alpha]\!] = T$, при любой $f_\mathcal{P}$

Определение. Конечная модель: модель где V — конечно

Теорема 2.1. У ИИВ не существует полной конечной табличной модели

3 Модели Крипке

$$\begin{tikzcd} & \text{все банки лопнут, RSA сломают!!!} \\ P = NP? \arrow[ur, "+"] \arrow[dr, "-"'] & \\ & \text{RSA устоит} \end{tikzcd}$$

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. частичный порядок($\succeq$)
3. отношение вынужденности: $W_j \Vdash p_i$
   $(\Vdash) \subseteq W \times \mathcal{P}$
   При этом, если $W_j \Vdash p_i$ и $W_j \preceq W_k$, то $W_k \Vdash p$

Определение.

1. $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (и только тогда) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$

2. $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
3. Пусть во всех $W_i \preceq W_j$ всегда когда $W_j \Vdash \alpha$ имеет место $W_j \Vdash \beta$
   Тогда $W_i \Vdash \alpha \to \beta$
4. $W_i \Vdash \neg\alpha$ — α не вынуждено нигде, начиная с W_i: $W_i \preceq W_j$, то $W_j \nVdash \alpha$

Теорема 3.1. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\vDash \alpha$

Теорема 3.2. ИИВ корректна в модели Крипке

Доказательство. 1. $\langle W, \Omega \rangle$ — топология, где $\Omega = \{w \subseteq W | \text{если } W_i \in w,\ W_i \preceq W_j,\ \text{то } W_j \in w\}$

2. $\{W_k | W_k \Vdash p_j\}$ — открытое множество
   Примем $[\![p_j]\!] = \{W_k | W_k \Vdash p_j\}$
   Аналогично $[\![\alpha]\!] = \{W_k | W_k \Vdash \alpha\}$

□

4 Доказательство нетабличности

Пусть существует конечная табличная модель $|V| = n$

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \le i,j \le n+1 \\ i \ne j}} (p_i \to p_j \& p_j \to p_i)$$

1. $\nvdash \varphi$

$$\begin{tikzcd} & W_1 & p_1 \\ & W_2 & p_2 \\ W_0 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & \\ & W_{n+1} & p_{n+1} \end{tikzcd}$$

$$W_1 \not\Vdash (p_i \to p_k)\&(p_k \to p_1),\ k \neq 1$$

Значит

$$\not\Vdash (p_i \to p_j)\&(p_j \to p_i)$$

$$\not\Vdash \bigvee (p_i \to p_j)\&(p_j \to p_i)$$

$$\not\Vdash \varphi_n$$

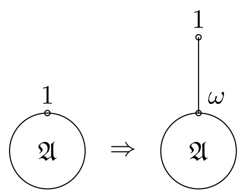
2. $\vDash_V \varphi_n$: по признаку Дирихле найдутся $i \neq j : [\![p_i]\!] = [\![p_j]\!]$
   $[\![p_i \to p_j]\!] =$ И и $[\![\varphi_n]\!] =$ И
   Значит $\vdash \varphi_n$ — противоречие

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение. Гёделева алгебра — алгебра Гейтинга, такая что из $\alpha + \beta = 1$ следует что $\alpha = 1$ или $\beta = 1$

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Гейтинга, тогда:

1. $\Gamma(\mathfrak{A})$



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(\mathfrak{A})}$ переименуем $1_{\mathfrak{A}}$ в ω

Теорема 4.1.

- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — алгебра Гейтинга
- $\Gamma(\mathfrak{A})$ — Геделева

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга

- $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$
- $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
- $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$
- $\varphi(0_{\mathfrak{A}}) = 0_{\mathfrak{B}}$

Теорема 4.2. $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

Определение.

- α — формула ИИВ
- f, g: оценки ИИВ
- f: ИИВ $\to \mathfrak{A}$
- g: ИИВ $\to \mathfrak{B}$

φ согласована с f, g, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 4.3. если $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ согласована с f, g и оценка $[\![\alpha]\!]_g \neq 1_{\mathfrak{B}}$, то $[\![\alpha]\!]_f \neq 1_{\mathfrak{A}}$

Теорема 4.4. ИИВ дизъюнктивно

Доказательство. Рассмторим алгебру Линденбаума: $\mathcal{L}$
Рассмотрим $\Gamma(\mathcal{L})$

- $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}} & , \substack{x=\omega \\ x=1_{\Gamma(\mathcal{L})}} \\ x & , \text{иначе} \end{cases}$$

φ — гомоморфизм
Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$, тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
$[\![\alpha + \beta]\!] = 1$, и т.к. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделева то $[\![\alpha]\!] = 1$ или $[\![\beta]\!] = 1$
Пусть $\nvdash \alpha$ и $\nvdash \beta$, тогда $\varphi([\![\alpha]\!]) \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $\varphi([\![\beta]\!]) \neq 1_{\mathcal{L}}$, т.е. $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $[\![\beta]\!]_{\mathcal{L}} \neq 1_{\mathcal{L}}$, тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ и $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ $\Rightarrow$ Противоречие $\square$