Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Правила вывода

Сверху посылки, снизу заключения

- Аксиома
$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$
- Введение $\rightarrow$
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$
- Удаление $\rightarrow$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$
- Введение &
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$$
- Удаление &
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$
- Введение $\vee$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$
- Удалние $\vee$
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$
- Удаление $\perp$
$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Пример.
$$\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}(\text{акс.})}{\vdash A \rightarrow A}(\text{вв. } \rightarrow)$$

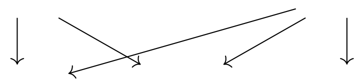
Пример. Докажем $\frac{}{\vdash A\&B \rightarrow B\&A}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A\&B \vdash A\&B}(\text{акс.})}{A\&B \vdash B}(\text{уд. }\&) \quad \cfrac{\cfrac{}{A\&B \vdash A\&B}(\text{акс.})}{A\&B \vdash A}(\text{уд. }\&)}{A\&B \vdash B\&A}(\text{вв. }\&)}{\vdash A\&B \rightarrow BA}(\text{вв. } \rightarrow)$$

Определение. Фиксируем A
Частичный порядок — антисимметричное, транзитивное, рефлексивное отношение
Линейный — сравнимы любые 2 элемента

- $a \leq b \vee b \leq a$
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \leq x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \leq k$

Пример.



Нет наименьшего, но есть 3 минимальных. Стрелка из a в b обозначает $b \leq a$

Определение.

- **Множество верхних граней** a и b: $\{x \big| a \leq x \& b \leq x\}$
- **Множество нижних граней** a и b: $\{x \big| x \leq a \& x \leq b\}$

Определение.

- $a + b$ — нименьший элемент множества верхних граней
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней

Определение. **Решетка** $= \langle A, \leq \rangle$ — структура, где для каждых a, b есть как $a + b$, так и $a \cdot b$, т.е. $a \in A, b \in B \implies a + b \in A$ и $a \cdot b \in A$

Определение. **Дистрибутивная решетка** если всегда $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Лемма 1. *В дистрибутивной решетке* $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

Определение. **Псевдодополнение** $a \to b =$ наиб.$\{c \big| a \cdot c \leq b\}$

Определение. **Импликативная решетка** — решетка, где для любых a, b есть $a \to b$

Определение. **0** — наименьший элемент решетки, **1** — наибольший элемент решетки

Определение. **Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)** — импликативная решетка с 0

Определение. **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

Пример.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

- $a \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot b = b$
- $a \cdot b = 0$
- $a + b = 1$
- $a \to b =$ наиб.$\{x \big| a \cdot x \leq b\} = b$
  $\{x \big| a \cdot x \leq\} = \{0, b\}$
- $a \to 1 = 1$

- $a \to 0 = 0$

Можем представить в виде пары $\langle x, y\rangle$

- $a = \langle 1, 0\rangle$
- $b = \langle 0, 1\rangle$
- $1 = \langle 1, 1\rangle$
- $0 = \langle 0, 0\rangle$

Лемма 2. *В импликативной решетке всегда есть* 1.

Теорема 1.1. Любая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

Теорема 1.2. Любая булева алгебра — модель КИВ

Определение. Рассмотрим множество X — **носитель**. Рассмотрим $\Omega \subseteq 2^X$ — подмножество подмножеств X — **топология**.

1. $\bigcup X_i \in \Omega$, где $X_i \in \Omega$
2. $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \Omega$, если $X_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Определение.
$$(X)^\circ = \text{наиб.}\{w \big| w \subseteq X, w \text{ — откр.}\}$$

Пример. Дискретная топология: $\Omega = 2^X$ — любое множество открыто. Тогда $\langle \Omega, \le \rangle$ — булева алгебра

Теорема 1.3.

- $a + b = a \cup b$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $a \to b = ((X \setminus a) \cup b)^\circ$
- $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$

Тогда $\langle \Omega, \le \rangle$ — алгебра Гейтинга

Определение. X — все формулы логики

- $\alpha \le \beta$ — это $\alpha \vdash \beta$
- $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
- $[\alpha]_\approx = \{\gamma \big| \gamma \approx \alpha\}$ — класс эквивалентности
- $X/_\approx = \{[\alpha]_\approx \big| \alpha \in X\}$

$\langle X/_\approx, \le \rangle$ — алгебра Гейтинга

Свойство 1. $\langle X/_\approx, \le \rangle$ — *алгебра Линденбаума, где* $X, \approx$ — *из интуиционистской логики*

Теорема 1.4. Алгебра Гейтинга — полная модель ИИВ