

Лекция 2

Луя Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Интуиционистская логика

3

Обозначение. Γ, Δ, Σ — списки высказываний

Определение. Следование: $\Gamma \vDash \alpha$, если

- $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$
- Всегда когда все $\llbracket \gamma_i \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$

Пример. $\vDash \alpha \rightarrow \alpha$ общезначимо

Определение. Теория Исчисление высказываний корректна, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\vDash \alpha$

Определение. Исчисление полно, если при любом α из $\vDash \alpha$ следует $\vdash \alpha$

Теорема 0.1 (о дедукции). $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Т.е. существует доказательство $\delta_1, \dots, \delta_n$, где $\delta_n = \alpha \rightarrow \beta$

Построим новое доказательство: $\delta_1, \dots, \delta_n, \alpha$ (гипотеза), β (М.Р.)

Эта новая последовательность — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

(\Rightarrow) Рассмотрим $\delta_1, \dots, \delta_n$ — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 & \alpha \rightarrow \delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_n & \alpha \rightarrow \delta_n \end{array}$$

Утверждение: последовательность $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ можно дополнить до доказательства, т.е. каждый σ_i — аксиома, гипотеза или получается по М.Р. Докажем по индукции:

База: $n = 0$

Переход: пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ — доказательство. тогда $\sigma_{n+1} = \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$ по трем вариантам:

1. δ_{n+1} — аксиома или гипотеза $\neq \alpha$
2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
3. $\delta_k \equiv \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$, $k, l \leq n$

Докажем каждый из трех вариантов

1.

$$\begin{array}{l|ll} (n+0.2) & \delta_{n+1} & \text{(аксиома или гипотеза)} \\ (n+0.4) & \alpha \rightarrow \delta_{n+1} & \text{(сх. акс. 1)} \\ (n+1) & \alpha \rightarrow \delta_{n+1} & \text{(М.Р. } n+0.2, n+0.4) \end{array}$$

2. $(n+0.2, n+0.4, n+0.6, n+0.8, n+1)$ — доказательство $\alpha \rightarrow \alpha$

3.

(k)	$\alpha \rightarrow (\sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1})$	
(l)	$\alpha \rightarrow \sigma_l$	
(n + 0.2)	$(\alpha \rightarrow \delta_l) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\delta_l \rightarrow \delta_{n+1})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	(сх. 2)
(n + 0.4)	$(\alpha \rightarrow \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	(М.Р. n + 0.2, l)
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	(М.Р. n + 0.4, k)

□

Теорема 0.2 (о корректности). Пусть $\vdash \alpha$

Тогда $\models \alpha$

Доказательство. Индукция по длине доказательства: каждая $\llbracket \delta_i \rrbracket = \text{И}$, если $\delta_1, \dots, \delta_k$ — доказательство α

Пусть $\llbracket \delta_1 \rrbracket = \text{И}, \dots, \llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$. Тогда осн. δ_{n+1} :

1. δ_{n+1} — аксиома

(а) $\delta_{n+1} \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ (Существуют α, β , что)

Пусть $\delta_{n+1} = A \rightarrow B \rightarrow A$. Тогда $\alpha \equiv A, \beta \equiv B$

$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rrbracket^{\llbracket \alpha \rrbracket := a, \llbracket \beta \rrbracket := b} = \text{И}$

a	b	$\beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	И	И

2. δ_{n+1} — М.Р. $\delta_k = \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$

Фиксируем оценку $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$, тогда $\llbracket \delta_l \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$

$\llbracket \delta_l \rrbracket$	$\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket$	$\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Т.е. $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$

□

Теорема 0.3 (о полноте). Пусть $\models \alpha$, тогда $\vdash \alpha$

Обозначение.

$$[\beta]^\alpha \equiv \begin{cases} \alpha & \llbracket \beta \rrbracket = \text{И} \\ \neg \alpha & \llbracket \beta \rrbracket = \text{Л} \end{cases}$$

Доказательство. Фиксируем набор переменных из $\alpha: P_1, \dots, P_n$
Рассмотрим $\llbracket \alpha \rrbracket^{P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n} = \text{И}$. Докажем, что $\underbrace{[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n}}_{\Delta} \vdash [\alpha]^\alpha$.

Индукция по длине формулы (по структуре)

База: $\alpha \equiv P_i$ $[P_i]^{P_i} \vdash [P_i]^{P_i}$

Переход: пусть $\eta, \zeta: \Delta \vdash [\eta]^\eta, \Delta \vdash [\zeta]^\zeta$. Покажем, что $\Delta \vdash [\eta \star \zeta]^{\eta \star \zeta}$, где \star — все связки

Используя лемму: $\models \alpha$, т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash [\alpha]^\alpha$. Но $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ при любой оценке, т.е. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$ при всех x_i

$$\left[\begin{array}{l} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, P_n \vdash \alpha \\ [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array} \right] \xrightarrow{\text{лемма}} [x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$$

□

Лемма 1.

- $\Gamma, \eta \vdash \zeta$
- $\Gamma, \neg \eta \vdash \zeta$

Тогда $\Gamma \vdash \zeta$

Лемма 2. $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_n]^{P_n} \vdash \alpha$, то $[x_1]^{P_1}, \dots, [x_{n-1}]^{P_{n-1}} \vdash \alpha$

1 Интуиционистская логика

$A \vee B$ — плохо

Пример. Докажем: существует a, b , что $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, но $a^b \in \mathbb{Q}$

Пусть $a = b = \sqrt{2}$. Рассмотрим $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Если нет, то ОК
- Если да, то возьмем $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}, a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

ВНК-интерпретация. α, β

- $\alpha \& \beta$ — есть α, β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем какое
- $\alpha \rightarrow \beta$ — есть способ перестроить α в β
- \perp — конструкция без построения $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$