

Лекция 14

Лука Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Теорема Левенгейма-Сколема	1
2 Про ω	2

1 Теорема Левенгейма-Сколема

Определение. Мощность модели

- D — предметное множество

Тогда $|D|$ — мощность модели

Определение. Пусть есть две модели M, M' . M' — **элементарная подмодель** M , если

- предметное множество $M' \subseteq$ предметное множество M
- пусть $\models_M \varphi$, тогда $\models_{M'} \varphi$
- Все функции и предикаты M' — сужение соответствующих функций и предикатов из M

Теорема 1.1. Пусть задана теория и модель M . Все ее формулы образуют множество T
Тогда для нее существует элементарная подмодель M'

$$|M'| = \max(|T|, \aleph_0)$$

Доказательство. $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$ — предметные множества. $D_i \subseteq D$

$D' = \bigcup D_i$ — ?? предметное множество

Рассмотрим все формулы из T

Определим операцию преобразования D :

$$\varphi \in T \quad \llbracket \varphi(y, x_1, \dots, x_k) \rrbracket = \text{И} \\ y, x_i \in D_n$$

Доделать

□

Примечание. “Парадокс” Сколема

Известно, что:

1. вещественные числа + матан — счетно-аксиоматизированны
2. $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ — внутри теории, на предметном языке
3. У вещественных чисел есть счетная модель $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ — по [теореме](#) — вне теории, на метаязыке

2 Про ω

Определение.

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ a \cdot c + a & b = c' \\ \sup_{c \leq b} \{a \cdot c\} & b \text{ — предельный} \end{cases}$$

Примечание.

$$\begin{aligned} \sup \omega &= \omega \\ \cup \{\omega\} &= \omega + 1 \end{aligned}$$

Пример. $\omega \cdot 1 < \omega \cdot 2$

$$\omega + \omega = \sup\{\omega + 0, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$$

Пример. $(a, b) > (c, d)$, если

1. $a > c$
2. $a = c, b > d$

$(a, b) \rightarrow \omega \cdot a + b$

1. $a > c \implies \omega \cdot a + b > \omega \cdot c + d$
2. $a = c, b > d \implies \omega \cdot a + b > \omega \cdot c + d$ Исправить

Пример.

$$\omega \cdot \omega = \sup\{\omega \cdot 0, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$$

Пример.

$$\omega^\omega = \sup\{\omega, \omega \cdot \omega, \omega \cdot \omega \cdot \omega, \dots\}$$

Пример. $\omega + 1$

```

1 record:
2     i: integer,
3     case i of
4         0 : a: boolean;
5         1 : b: integer
6     end
7 end

```

Исправить

Пример. $\omega + \omega + 2$

```

1 record:
2     i: integer,
3     case i of
4         0 : a: integer;
5         1 : b: integer;
6         2 : c: boolean;
7     end
8 end

```