Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Аксиома выбора

Аксиома 8.

- На любом семействе непустых множеств $\{A_S\}_{S\in\mathbb{S}}$ можно определить функцию $f : \mathbb{S} \to \bigcup_S A_S$, которая по множеству возвращает его элемент
- Любое множество можно вполне упорядочить
- Для любой сюрьективной функции $f : A \to B$, найдется частично обратная $g : B \to A$, $g(f(x)) = x$

Определение. Дизъюнктное семейство множество — семейство непересекающихся множеств

$$D(y) :\ \forall p.\forall q.p \in y \& q \in y \to p \cap q = \varnothing$$

Определение. Прямое произведение дизъюнктного множества

$$\bigtimes S = \{t \big| \forall p.p \in S \leftrightarrow \exists! c.c \in p \& c \in t\}$$

Аксиома 8. Если $D(y) \& \forall t.t \in y \to t \neq \varnothing$, то $\bigtimes y \neq \varnothing$

Теорема 1.1 (Диаконеску)**.** Рассморим ZF(аксиоматика Цермело-Френкеля) поверх ИИП. Если добавим аксиому выбора то $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

2 Аксиома фундирования

Аксиома 9.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \& y \cap x = \varnothing$$

В каждом непустом множестве есть элемент, не пересекающийся с ним

3 Схема аксиом подстановки

ZFC — Zemelo-Frenkel Choice
Аксиома 10. S — множество, f — функция, то $f(S)$ — множество, т.е. существует формула $\varphi(x, y)$:

$$\forall x \in S.\exists! y.\varphi(x, y)$$

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x & p(x) \\ \varnothing & \neg p(x) \end{cases}$$

$$\{x \in S | p(x)\} = \cup f(S)$$

4 Мощность множества

Определение. Равномощность $|a| = |b|$, если существует биекция $a \to b$

Определение. Строго большая мощность $|a| > |b|$, если существует $f : b \to a$ — инъекция, но не биекция

Определение. Кардинальное число t — ординал x: для всех $y \in x$: $|y| \neq |x|$

Определение. Мощность множества $|x|$ — такое кардинальное число t, что $|t| = |x|$

Лемма 1. *a, b — кардиналы и $|a| = |b|$, то $a = b$*

Примечание.

- $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots$ — конечные кардиналы
- $\aleph_0 = |\omega|$
- $\aleph_1$ — следующий кардинал за $\aleph_0$

Теорема 4.1 (Кантора)**.** Рассмотрим S — множетво, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех подмножеств
Тогда $|\mathcal{P}(S)| > |S|$

Теорема 4.2 (Кантора-Бернштейна)**.** Если a, b — множества, $f : a \to b$, $g : b \to a$ — инъективны
Тогда существует биекция $a \to b$