Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Теория множеств

Определение. **Теория множеств** — теория первого порядка с нелогическим предикатом ‘принадлежность‘ ($\in$) и следующими аксиомами и схемами аксиом.

Определение. B – **бинарное отношение** на X: $B \subseteq X^2$

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\operatorname{snd}\langle a, b\rangle = \bigcup\left(\bigcup\langle a, b\rangle \setminus \bigcap\langle a, b\rangle\right) = \{b\}$$

$$\operatorname{fst}\langle a, b\rangle = \bigcup\left(\bigcap\langle a, b\rangle\right) = \{a\}$$

Определение. $a \subseteq b$, если $\forall x.x \in a \to x \in b$

Примечание. Что такое равенство?

- Duck typing: принцип Лейбница (неразличимость) — $A = B$, если для любого $P \quad P(A) \leftrightarrow P(B)$ $a \leftrightarrow b$, если $(a \to b)\&(b \to a)$
- Определение равенства как структур в C (принцип объемности) — A и B состоят из одинаковых элементов

Определение. $a = b$, если $a \subseteq b\&b \subseteq a$

Примечание. Пустое множество имеет тип 0, множество с одним элементов имеет тип 1 и т.д. Запретим запросы ‘принадлежит‘ на одинаковых типах

Определение. “Предикат“ $P(x)$ — множество $\{x \middle| P(x)\}$

Аксиома 1 (равенства). *Равные множества содержатся в одних и тех же множествах*

$$\forall a.\forall b.\forall c.a = b\&a \in c \to b \in c$$

Аксиома 2 (пустого множества). *Существует $\varnothing$: $\forall x.\neg x \in \varnothing$*

Аксиома 3 (пары). *Если $a \neq b$, то $\{a, b\}$ — множество*

$$\forall a.\forall b.a \neq b \to \exists p.a \in p\&b \in p\&\forall t.t \in p \to t = a \vee t = b$$

Аксиома 4 (объединения). *Если x — непустое множество, то $\bigcup x$ — множество*

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s\&s \in x$$

Пример.

$$\bigcup\{1,\{2,3\},\{\{4\}\}\} = 1 \cup \{2,3,\{4\}\}$$

Почему $2 \in p$, потому что $2 \in \underbrace{\{2,3\}}_{s}$, $\{2,3\} \in x$

Аксиома 5 (Степени)**.** *Для множества x, существует $\mathcal{P}(x)$ — множество всех подмножеств*

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Пример.

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$
$$\mathcal{P}(\{\{4\}\}) = \{\varnothing,\{\{4\}\}\}$$

Аксиома 6 (Схема аксиом выделения)**.** *Если a — множество, $\varphi(x)$ — формула, в которую не входит свободно b, то $\{x \big| x \in a \& \varphi(x)\}$ — множество*

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow y \in x \& \varphi(y)$$

Аксиома 7 (Аксиома бесконечности)**.** *Существуют множества N, такие, что*

$$\varnothing \in N \& \forall x.x \in N \to x \cup \{x\} \in N$$

Теорема 1.1. Если x — множество, то $\{x\}$ — множество

$$\exists t.a \in t \leftrightarrow a = x$$

Доказательство.

- $x = \varnothing$, тогда $t \coloneqq \mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}(\varnothing) = \varnothing$
- $x \neq \varnothing$, тогда $s \coloneqq \{x, \varnothing\}$ — аксиома пары, $t \coloneqq \{z \big| z \in s \& z \neq \varnothing\}$

□

Теорема 1.2. a, b — множества, то $a \cup b$ — множество

Доказательство.

- $a = b$, тогда $a \cup b = a$ по теореме
- $a \neq b$, тогда $a \cup b = \bigcup\{a,b\}$ по аксиоме

□

Обозначение. a, b — множества, $a \cup b =$ такое c

$$a \subseteq c \& b \subseteq c \& \forall t.t \in c \to t \in a \vee t \in b$$

Определение. $a' = a \cup \{a\}$

Определение. Ординальные числа

- $\overline{0} = \varnothing$
- $\overline{1} = \varnothing' = \{\varnothing\}$
- $\overline{2} = \varnothing'' = \{\varnothing\}' = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
- ...

Определение. Множество S **транзитивно**, если

$$\forall a.\forall b.a \in b \& b \in S \to a \in S$$

Определение. Множество S **вполне упорядочено** отношением $\in$, если

1. $\forall a.\forall b.a \neq b \& a \in S \& b \in S \to a \in b \lor b \in a$ — линейный
2. $\forall t.t \subseteq S \to \exists a.a \in t \& \forall b.b \in t \to b = a \lor a \in b$ — в любом подмножестве есть наименьший элемент

Определение. Ординал (Ординальное число) — вполне упорядоченное отношением $\in$, транзитивное множество

Определение. Предельный ординал $s \neq \varnothing$ — ординал, не имеющий предшественника

$$\forall p.p' \neq s$$

Пример.

$$\omega = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Очевидно, что $\omega \subseteq N$ (из аксиомы бесконечности)

Теорема 1.3. ω — множество

Определение.

$$a + b = \begin{cases} a & b = 0 \\ (a+c)' & b = c' \\ \sup\limits_{c \in b}(a+c) & \text{если } b \text{ — предельный} \end{cases}$$

Определение. $\sup t$ — минимальный ординал, содержащий все элементы из t

Пример. $\{0, 1, 3\}$ — ординал?

- упорядоченный
- <u>не транзитивный</u>

$\sup\{0, 1, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Пример.

$$1 + \omega = \sup_{c \in \omega}(1 + c) = \sup\{0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, \dots\}$$
$$\sup\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \omega$$

Пример.

$$\omega + 1 = \omega' = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$