Лекция 11

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Геделева нумерация

Определение. ($\ulcorner \bullet \urcorner$)

s	$\ulcorner s \urcorner$
(	3
)	5
,	7
$\&$	9
$\vee$	11
$\neg$	13
$\rightarrow$	15
$\forall$	17
$\exists$	19
.	21
f_k^n	$23 + 6 \cdot 2^n \cdot 3^k$
P_k^n	$25 + 6 \cdot 2^n \cdot 3^k$
x_k	$27 + 6 \cdot 2^k$

Тогда известные функции будут:

- $(=) = P_0^2$
- $(0) = f_0^0$
- $(+) = f_0^2$
- $(\cdot) = f_1^2$
- $(') = f_0^1$

Определение. $\ulcorner a_0 a_1 \dots a_{n-1} \urcorner = 2^{\ulcorner a_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner a_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_n^{\ulcorner a_{n-1} \urcorner}$

Определение. $S_0\ S_1\ S_2 = 2^{\ulcorner S_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner S_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_n^{\ulcorner S_n \urcorner}$

Примечание. p_i — i-е простое ($p_1 = 2$)

Пример. $\ulcorner a = 0 \urcorner = 2^{27+6} \cdot 3^{25+6\cdot 4} \cdot 5^{23+6}$

Теорема 1.1. Рассмотрим функцию $\mathrm{Proof}(x, p) = \begin{cases} 1 & \text{если } p \text{ — геделев номер доказательства } \chi \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$, Proof — рекурсивна

Теорема 1.2. Если функция представима в формальной арифметике, то она рекурсивна

Доказательство. $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, т.е. существует формула φ с $n+1$ свободными переменными $x_1, \dots, x_{n+1}$.
Если $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$
Ожидаем $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \overline{k_{n+1}})$, т.е. существует доказательство δ — последовательность $\delta_1, \dots, \delta_t$

$$\text{Proof}(\ulcorner \varphi \overline{k_1}, \dots, \overline{k_{n+1}} \urcorner, \ulcorner k \urcorner) = 1$$

$$\begin{aligned}
&S\langle \text{plog}_2, \\
&\quad M\langle S\langle \text{Proof}, \\
&\qquad S\left\langle \text{Subst}_{n+1}, \ulcorner \varphi \urcorner, P^2_{n+1}, P^3_{n+1}, \dots, P^{n+1}_{n+1}, S\left\langle \text{plog}_2, P^1_{n+2} \right\rangle \right\rangle, \\
&\qquad S\left\langle \text{plog}_3, P^1_{n+1} \right\rangle \\
&\quad \rangle \\
&\rangle
\end{aligned}$$

□

Примечание. Subst — функция которая подставляет аргументы в формулу

Примечание. χ — формула формальной арифметики

$$W_1(\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner p \urcorner) = \begin{cases} 0 & \text{если } p \text{ — доказательство } \chi[x_0 := \overline{\ulcorner \chi \urcorner}] \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Реализация W_1 через Subst очевидна, тогда W_1 представима в формальной арифметике формулой ω_1. $\sigma(x) = \forall p.\neg\omega_1(x, p)$ — "самоприменение x недоказуемо"

$$\vdash^? \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$$

Определение. ω-непротиворечивость. Теория ω-непротиворечива, если для любой формулы $\varphi(x)$:

- если $\vdash \varphi(\overline{0}), \vdash \varphi(\overline{1}), \dots$, то $\nvdash \exists x.\neg\varphi(x)$

Лемма 1. *Если теория ω-непротиворечива, то непротиворечива*

Доказательство. Рассмотрим $\varphi(x) := x = x$

$$\vdash \overline{0} = \overline{0} \quad \vdash \overline{1} = \overline{1} \quad \dots$$

Т.е. $\nvdash \exists x. x \neq x$ □

Теорема 1.3 (Геделя о неполноте арифметики №1)**.**

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$
2. Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$

Доказательство.

1. Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, т.е. существует p — геделев номер доказательства

$$\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \quad \vdash \forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$$

   С другой стороны, $W_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p) = 0$, т.е. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$

2. Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$

$$\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$$

$$\left.\begin{matrix} \vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{0}) \\ \vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{1}) \\ \vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \overline{2}) \\ \vdots \end{matrix}\right\} \text{иначе} \vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$$

$$\nvdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$$

□

Следствие 1.3.1. Формальная арифметика со стандартной интерпретацией неполна

Доказательство. Доделать □

Теорема 1.4 (Геделя о неполноте арифметики №1 в форме Россера)**.**

$$W_2(x,p) = \begin{cases} 0 & \text{если } p \text{ — доказательство } \neg x(\overline{\ulcorner x \urcorner}) \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

ω_2 — формула соответствующая W_2

$$\rho(x) = \forall p.\omega_1(x,p) \to \exists q.q < p \& \omega_2(x,q)$$

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$
2. Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner \rho \urcorner})$

Доделать

Определение.

$$\text{Consis} \equiv \forall p.\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p)$$

π — формула соответствующая $Proof(x,p)$, т.е. p — доказательство x

Теорема 1.5 (Геделя о неполноте арифметики №2)**.**

$$\vdash \text{Consis} \to \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$$

Т.е. если докажем, что если формальная арифметика непротиворечива, то автоматически $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, т.е. ФА противоречива

Схема. Прочтем что написано в теореме: $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ раскрывается в $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$, т.е. если формальная арифметика непротиворечива, то не существует p, который доказывает $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$, а это в точности утверждение теоремы Геделя о неполноте №1. Т.е. эта теорема — формализация теоремы Геделя о неполноте №1. □

Следствие 1.5.2. Никакая теория, содержащая формальную арифметику, не может доказать свою непротиворечивость