# Лекция 10

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

**1 Рекурсивные функции** **1**
1.1 Функция Аккермана . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**2 Связь с формальной арифметикой** **2**

# 1 Рекурсивные функции

**Определение.** $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

1. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $Z(x) = 0$
2. $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $N(x) = x + 1$
3. $S_k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $f_1, \dots, f_k : \ \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

   $$S_k \langle g, f_1, \dots, f_k \rangle (x_1, \dots, x_m) = g(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \dots, f_k(\overline{x}))$$

   , где $\overline{x} = x_1, \dots, x_m$
4. $P_k^l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $l \le k$
   $$P_k^l(x_1, \dots, x_k) = x_l$$
5. $R \langle f, g \rangle : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ — **примитивная рекурсия**
   - $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$
   - $g : \mathbb{N}^{m+2} \to \mathbb{N}$

   $$R \langle f, g \rangle (y, x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_m) & y = 0 \\ g(y-1, R \langle f, g \rangle (y-1, x_1, \dots, x_m), x_1, \dots, x_m) & y > 0 \end{cases}$$

*Пример.*

$$R \langle f, g \rangle (0, x) = f(x)$$

$$R \langle f, g \rangle (1, x) = g(0, f(x), x)$$

$$R \langle f, g \rangle (2, x) = g(1, g(0, f(x), x), x)$$

**Определение.** $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ — **примитивно-рекурсивная**, если найдется $g$ – выражение $f$ через примитивы $Z, N, S, P, R$, т.е. $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$

*Пример.*

- $1 = S \langle N, Z \rangle$

- $(+2) = S\langle N, N\rangle$

$$S\left\langle \underset{g}{N}, \underset{f}{N} \right\rangle(x) = g(f(x)) = N(N(x)) = x + 2$$

- $(+3) = S\langle N, (+2)\rangle$
- $(\times 2)_a = R\left\langle P_1^1, S\left\langle N, P_3^2\right\rangle\right\rangle$

$$f(a,b) = \begin{cases} b & a = 0 \\ f(a-1, b+1) & a > 0 \end{cases}$$

— это почти определение $+$, т.е. $f(x,x) = x \cdot 2$

$$(\times 2)_a = \begin{cases} P_1^1(a) & y = 0 \\ b + 1 & y > 0 \end{cases} \boxed{\text{Исправить}}$$

, где $a$ — счетчик, $b$ — предыдущее значение, $c$ — $x$

- $(\times 2) = S\left\langle (\times 2)_a, P_1^1, P_1^1 \right\rangle$

**Определение.**

6. $M\langle f\rangle : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ — **минимизация**
   - $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

$$M\langle f\rangle(x_1, \dots, x_m) = y$$

— минимальный $y$

$$f(y, x_1, \dots, x_m) = 0$$

Если $f(y, x_1, \dots, x_m) > 0$ при всех $y$, то результат не определен

**Теорема 1.1.** $(+), (\cdot), (x^y), (:), (\sqrt{}),$ деление с остатком — примитивно-рекурсивные функции

**Лемма 1.** $p_1, p_2, \dots$ — *простые числа.*
$p(i) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(i) - p_i$ — *примитивно-рекурсивная функция*

**Определение.** $\operatorname{plog}_n k = \max t : n^t | k$ — примитивно-рекурсивная функция

*Пример.*

- $\operatorname{plog}_5 120 = 1$
- $\operatorname{plog}_2 120 = 3$

### 1.1 Функция Аккермана

$$A(m,n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m-1, 1) & m > 0,\ n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

**Лемма 2.** $A(m,n)$ — *не примитивно-рекурсивная*

Можно сказать что если есть текст длинны $n$, которые выводит текст длинны $k$, то текст длинны $n+1$ не может выводить текст больше чем $k^k$ $\boxed{\text{Исправить}}$

## 2 Связь с формальной арифметикой

**Теорема 2.1.** $f$ — рекурсивная функция, тогда $f$ представима в формальной арифметике

**Теорема 2.2.** Если $f$ представима в формальной арифметике, то она рекурсивна

*Примечание.*

- $\vdash \varphi$ — доказательство $(\varphi)$ в ФА
- $\delta_1, \dots, \delta_n \equiv \varphi$ — доказательство

- $C$ — функция(рекурсивная), превращающая доказательство в ФА

$$C(p,x) \begin{matrix} = 0 & \text{если доказательство корректно} \\ \neq 0 & \text{если не доказуемо} \end{matrix}$$

, где $p$ — запись доказательства, $x$ — формула

- Формула $\delta(p,x,y)$ – доказательство

Доделать

*Примечание.* Проблема останова

$$P(p,x) = \begin{cases} 0, \text{если } p(x) \text{ останавливается} \\ 1, \text{если не останавливается} \end{cases}$$

$$Q(p,x) = \text{if } P(p,p) = 1 \text{ then } 0 \text{ else while true do;}$$

**Теорема 2.3.** Примитивы $Z, N, S, P$ представимы в ФА

*Доказательство.* Аргументы: $x_1, \ldots, x_n$

1. $Z(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\xi \coloneqq x_1 = x_1 \& x_2 = 0$$
2. $N(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\nu \coloneqq x_2 = x_1'$$
3. $P_k^l(x, \ldots, x_k) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
$$\pi_k^l \coloneqq x_1 = x_1 \& x_2 = x_2 \& \ldots \& x_l = x_{k+1} \& \ldots \& x_k = x_k$$
$$\left( \underset{i \neq l}{\&} x_i = x_i \right) \& x_l = x_{k+1}$$
4. $S \left\langle \underset{\gamma}{g}, \underset{\varphi_1}{f_1}, \ldots, \underset{\varphi_k}{f_k} \right\rangle$
    - $(x_1, \ldots, x_m) = x_{m+1}$
$$\exists r_1.\exists r_2.\ldots\exists r_k.\varphi_1(x_1, \ldots, x_m, r_1) \& \ldots \& \varphi_k(x_1, \ldots, x_m, r_k) \& \gamma(r_1, \ldots, r_k, x_{m+1})$$

□

**Определение.** $\beta$-функция Геделя

$$\beta(b,c,i) = b \bmod (1 + c \cdot (i+1))$$

**Теорема 2.4.**

- $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — некоторые значения $\in \mathbb{N}$

Тогда найдутся $b$ и $c$, что
$$\beta(b,c,i) = a_i$$

*Доказательство.* Доделать □

*Примечание.* $\beta$-функция Геделя — представима в ФА

$$B(b,c,i,q) = (\exists p. b = p \cdot (q + c \cdot (1+i)) + q) \& q < b$$

*Примечание.*

- $M\langle f\rangle$, $f:\mathbb{N}^{m+1}\to\mathbb{N}$

$$\varphi(x_{m+1},x_1,\dots,x_m,\overline{0})\&\forall y.y<x_{m+1}\to\neg\varphi(y,x_1,\dots,x_m,\overline{0})$$

  , где $(a<b)=(\exists n.a+n=b)\&\neg a=b$

- $$R\langle g,x_1,\dots,x_n\rangle=\begin{cases}f(x_1,\dots,x_n)y=0 & y=0\\ g(y-1,R(y-1,x_1,\dots,x_n),x_1,\dots,x_n) & y>0\end{cases}$$

$$\exists b.\exists c.\exists f.\varphi(x_1,\dots,x_nf)\&B(b,c,\overline{0},f)\&$$

$$\&\forall y.y<x_{n+1}\to\exists r_y.B(b,c,y,r_y)\&\exists r_{y+1}.B(b,c,y+1,r_{y+1})\&\gamma(y,r_y,x_1,\dots,x_n,r_{y+1})$$