Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Исчесление высказываний

1.1 Язык

1. Пропозициональные переменные
   A'_i — большая буква начала латинского алфавита

2. Связки
   $\underbrace{\alpha}_{\text{метапеременная}}, \beta$ — высказывания
   Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg\alpha)$ — высказывания

1.2 Мета и предметные

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$ — метапеременные для выражений
- X, Y, Z — метапеременные для предметных переменные

Метавыражение: $\alpha \to \beta$
Предметное выражение: $A \to (A \to A)$ (заменили α на A, β на $(A \to A)$)

Пример. Черным — предметные выражения, Синим — метавыражения

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

1.3 Сокращение записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо(лево-ассоциативная)
- $\to$ — правоассоциативная
- Приоритет по возрастанию: $\to, \vee, \&, \neg$

Пример. Расставление скобок

$$(A \to ((B \& C) \to D))$$
$$(A \to (B \to C))$$

1.4 Теория моделей

- $\mathcal{P}$ — множество предметных переменных
- $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to V$, где $\mathcal{T}$ — множество высказываний, $V = \{\text{И}, \text{Л}\}$ — множество истиностных значений

1. $[\![x]\!] : \mathcal{P} \to V$ — задается при оценке $[\![]\!]^{A:=v_1, B:=v_2}$:
    - $\mathcal{P} = v_1$
    - $\mathcal{P} = v_2$
2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \underbrace{\star}_{\substack{\text{определенно} \\ \text{ественным образом}}} [\![\beta]\!]$, где $\star \in [\&, \vee, \neg, \to]$

    Пример.
    $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} \to [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = \text{И} \to \text{И} = \text{И}$$

    Также можно записать так:
    $$[\![A \to A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}} = f_{\to}([\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}, [\![A]\!]^{A:=\text{И}, B:=\text{Л}}) = f_{\to}(\text{И}, \text{И}) = \text{И}$$

    , где $f_{\to}$ определена так:

a	b	$f_{\to}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

1.5 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка соответсвующая определению высказывания, с:

- метапеременными $\alpha, \beta, \ldots$

Определение. Аксиома — высказывания:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \to \alpha$
5. $\alpha \& \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

1.6 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где α_i:

- аксиома
- существует $k, l < i$, что $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha$

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Пример. $\vdash A \to A$

1	$A \to A \ \to A$	(схема аксиом 1)
2	$A \to (A \to A) \to A$	(схема аксиом 1)
3	$(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(схема аксиом 2)
4	$(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$	(М.Р. 1 и 3)
5	$A \to A$	(М.Р. 2 и 4)

Определение. Доказательством высказывания β — список высказываний $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — доказательство
- $\alpha_n \equiv \beta$