

Практика 7

Цуа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Тройной интеграл

1

Задача 1.

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\gamma}^{\delta} d\psi \dots$$

Решение.

$$x = r_0 \cos \varphi \cos \psi$$

$$y = r_0 \sin \varphi \cos \psi$$

$$z = r_0 \sin \psi$$

$$\begin{vmatrix} i & -r_0 \cos \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ j & r_0 \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ k & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \psi \\ -\sin \varphi \cos^2 \psi \\ \cos \psi \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$r^2 \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\gamma}^{\delta} d\psi \cos \psi$$

Задача 2.

$$\iint_{x \geq 0, y \geq 0} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^3)^p}$$

Решение.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \varphi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{3} r^{\frac{2}{3}} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi}{(1 + r^2)^p}$$

1 Тройной интеграл

Есть трехмерная фигура Ω

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz \tag{1}$$

3 = 1 + 2 Берем сечение по одной из осей и интегрируем по двумерной области

$$1 = \int_a^b dx \iint_{\Omega_x} f dy dz$$

3 = 2 + 1 Спроецируем по x и y фигуру на область Ω_{xy} , интегрируем по отрезку.

$$1 = \iint_{\Omega_{xy}} dx dy \int_{z(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz$$

$$\iiint xy^2 z^3 \tag{2}$$

- $z = xy$
- $y = x$
- $x = 1$
- $z = 0$

1.

$$2 = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz$$

2.

$$2 = \int dy \int_y^1 dx \int_0^{xy} f dz$$

3.

$$2 = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{\frac{z}{x}}^x f dy$$

Задача 3.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f dz$$

Решение.

$$= \int_0^1 dz \left(\int_z^1 dx \int_0^{z-x} f dy + \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f dy \right)$$

Задача 4.

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^l \frac{1}{m^3} \int_0^a d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\tau f(\zeta) d\zeta$$

Решение.

$$0 \leq m \leq l \leq k \leq N$$

$$0 \leq \zeta \leq \eta \leq \xi \leq a$$

$$= \int_0^1 d\zeta \int_\zeta^a \int_\eta^a f(\zeta) d\xi = \int_0^a f(\zeta) \frac{(a-\zeta)^2}{2} d\zeta$$

Задача 5.

$$\iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

Решение.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \psi \\ \vdots \\ J = r^2 \cos \psi \end{cases}$$