

# Практика 6

Лука Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

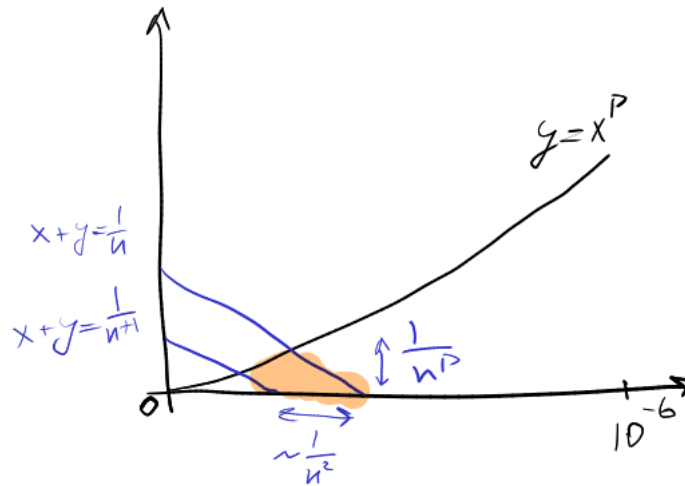
## Содержание

### 1 Интеграл по поверхности

2

Задача 1.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x+y|^p} dx dy$$



Решение.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x+y|^p} dx dy = \sum_n \int_{\Omega_n} \approx \sum_n \frac{1}{(\frac{1}{n})^p} \cdot \frac{1}{n^{p+2}}$$

Задача 2. То же самое с четвертинкой астроида

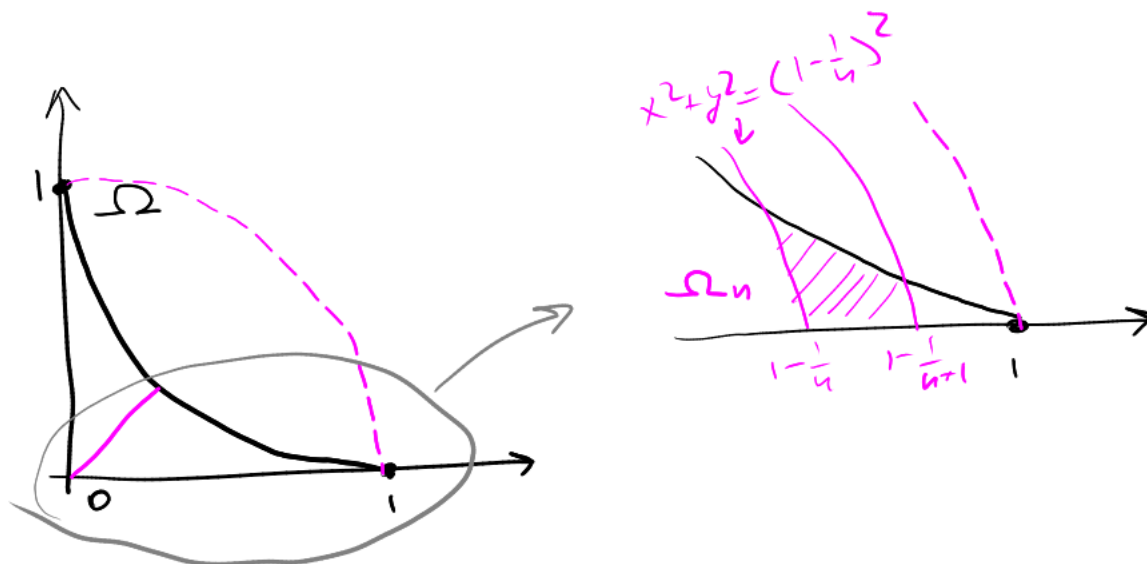
Решение.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x+y|^p} dx dy \approx \sum \frac{1}{n^{3-p}}$$

Задача 3.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|1-x^2-y^2|} dx dy$$

,  $\Omega$  — четверть астроида

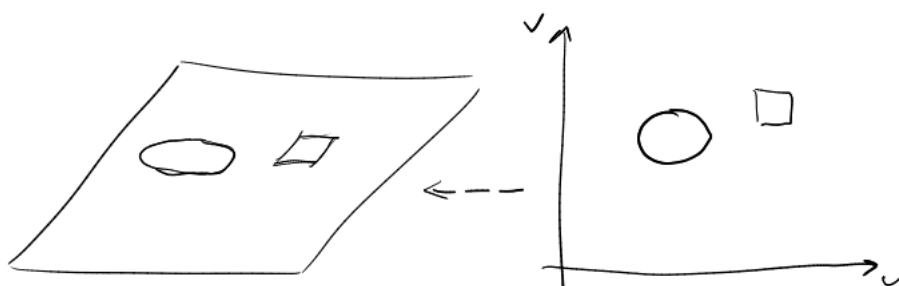


Решение.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|1-x^2-y^2|} dx dy = \sum_n \int_{\Omega_n} \approx \sum \frac{1}{(\frac{1}{n})^p} \cdot \frac{1}{n^{3.5}}$$

Задача 4.

### 1 Интеграл по поверхности



$$\begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix}$$

$$S = \iint_{\Omega} |\vec{x}'_u \times \vec{x}'_v| du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

, где  $E = |\vec{x}'_u|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$ ,  $F = (\vec{x}'_u, \vec{x}'_v) = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$ ,  $G = |\vec{x}'_v|^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$

Задача 5. График  $z = z(x, y)$

Решение.

$$\begin{matrix} x = x & i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} & \begin{matrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{matrix} \\ y = y & j & & \\ z = z(x, y) & k & & \end{matrix}$$

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$$

Задача 6.

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 = a^2 \\ az = xy \end{matrix}$$

Решение.

$$S = \iint_{\bigcirc} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}} dx, dy = \left| \begin{array}{l} x = ar \cos \varphi \\ y = ar \sin \varphi \end{array} \right. = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1 + r^2} a^2 r = 2\pi a^2 (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^1$$

**Задача 7.**

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = a^2$$

Решение.

$$x = \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$x'_y = 0 \quad x'_z = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{y^2 + z^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz = 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{1 + 0 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} dy = \\ &= 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{x^2} dy = 16a \int dz \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \end{aligned}$$

**Задача 8.**

$$z^2 = 2xy \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$$

Решение.

$$z = \sqrt{2xy}$$

$$z'_x = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z'_y = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \iint \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dx dy = \iint \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} = \iint \frac{x + y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{y} dy$$

**Задача 9.**

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Решение.

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} dx dy = 4\sqrt{2} \iint \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$