Практика 5

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

$$f \geq 0 \quad \int_\Omega f d\mu$$

$$f \text{ — суммируемая } \int_\Omega |f| d\mu < +\infty$$

Пример.

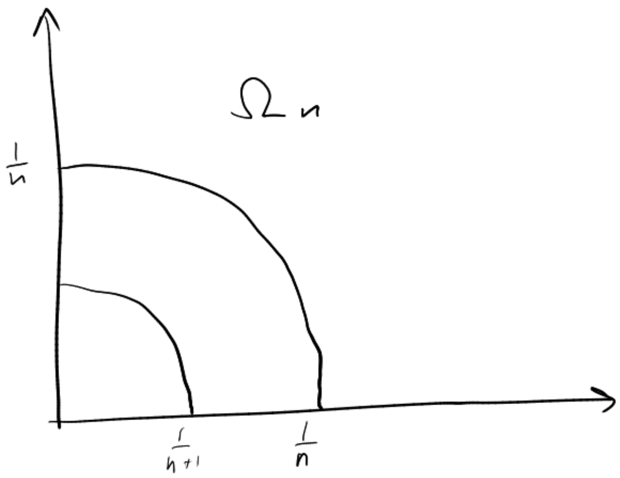
$$f = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Ω — окружность радиуса 1

$$\iint \frac{1}{x^2+y^2} dxdy = \sum_n \iint \frac{1}{x^2+y^2} dxdy \asymp \sum \tag{1}$$

$$f, g > 0 \quad f \asymp g \quad \exists c_1, c_2 > 0 \; c_1 f < g < c_2 f$$

$$\inf f \mu E \leq \int_E f d\mu \leq \sup f \mu E$$



в Ω_n:

$$\frac{1}{x^2+y^2} \asymp \frac{1}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$n^2 \leq \frac{1}{x^2+y^2} \leq (n+1)^2 \leq 4n^2$$

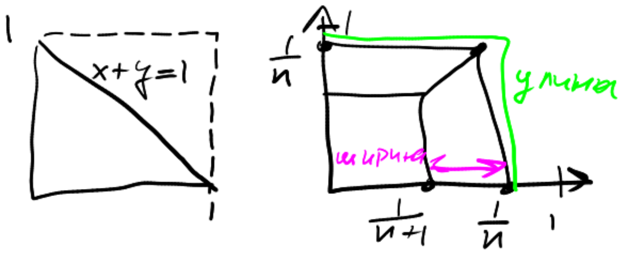
$$\text{(продолжение 1)} \; \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot \lambda\Omega_n = \sum n^2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sim \sum \frac{c}{n} \text{ — расходится}$$

Пример.

$$f = \frac{1}{x+y}$$

Ω — квадрат 1×1

$$\iint \frac{1}{x+y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint \frac{1}{x+y} \asymp \sum \frac{1}{\frac{1}{n}} \tag{2}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \le \frac{1}{n+1} < x + y \le \frac{2}{n}$$

$$2 \sum \frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum \frac{1}{n^2} \text{ — сходится}$$

длина $\approx \frac{1}{n}$, ширина $\approx \frac{1}{n^2}$

Функции:

1. $$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^p}$$

2. $$g(x,y) = \frac{1}{|x+y|^p}$$

3. $$h(x,y) = \frac{1}{|1 - x^2 - y^2|^p}$$

Области:

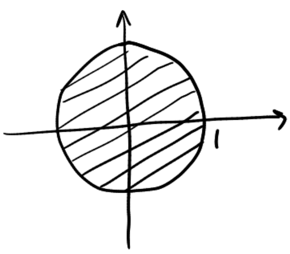


Рис. 1: Круг

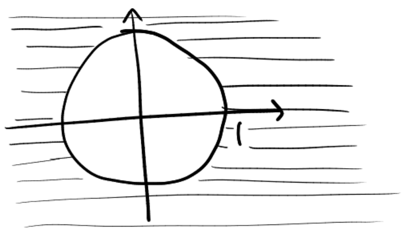


Рис. 2: Доплнение круга

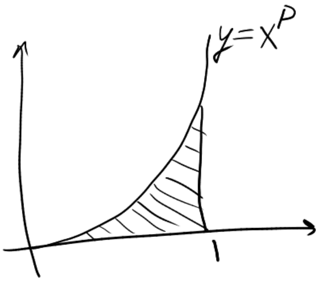


Рис. 3: Треугольник

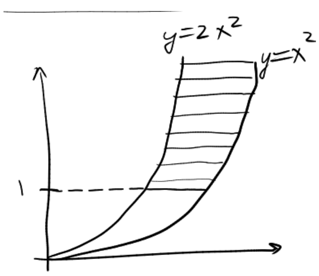


Рис. 4: "Рог"

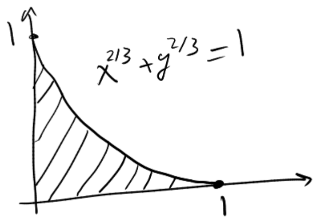


Рис. 5: Четверть астроиды

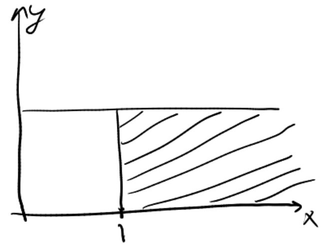


Рис. 6: Полоса

Задача 1. $f = 1.$, Дополнение круга

Решение.

$$\frac{1}{(n+1)^{2p}} \le f \le \frac{1}{n^{2p}} \Rightarrow f \asymp \frac{1}{n^{2p}}$$

$$\frac{1}{(n+1)^{2p}} \le f \le \frac{1}{n^{2p}} \Rightarrow f \asymp \frac{1}{n^{2p}}$$

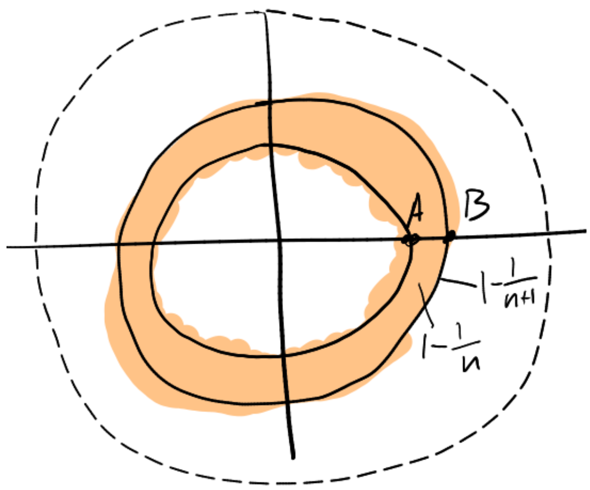
$$\iint \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint_{\Omega_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} \asymp \sum \frac{1}{n^2p} \cdot n = \sum \frac{1}{n^{2p-1}}$$

- $2p - 1 > 1$ — сходится
- $2p - 1 \le 1$ — расходится

Задача 2. $f = 3.$, Круг

Решение.

$$\iint_\Omega f = \sum_n \iint_{\Omega_n} \frac{1}{|1-x^2-y^2|^p} dxdy \tag{3}$$



A:

$$1-(1-\frac{1}{n})^2 - o^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

B:

$$\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \le 1-(x^2+y^2) \le 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{2}{n}$$

$$1-(x^2+y^2) \asymp \frac{1}{n}$$

$$f \asymp \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^p} = n^p$$

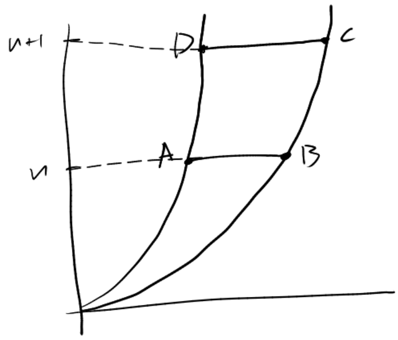
$$3 \asymp \sum n^p \cdot \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n^{2-p}}$$

- $2-p>1$ — сходится
- $2-p<1$ — расходится

Задача 3. $f=2.$, "Рог"

Решение.

$$\iint_\Omega f=\sum_n\iint_{\Omega_n} \tag{4}$$



$x+y$**:**

$$\begin{array}{llll} A\left(\sqrt{\frac{n}{2}},2\right) & n+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} & \text{D} & n+1+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} \\ B(\sqrt{n},n) & n+\sqrt{n} & \text{C} & n+1+\sqrt{n+1} \end{array}$$

$$\frac{1}{(3n)^p}\leq {}^{"}D^{"}\frac{1}{(x+y)^p}\leq {}^{"}A^{"}\frac{1}{\left(n+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^p}\leq\frac{1}{n^p}$$

$$f\asymp\frac{1}{n^p}$$

$$4\asymp\sum\frac{1}{n^p}\cdot\sqrt{n}=\sum\frac{n^{p-\frac{1}{2}}}{}$$

- $p-\frac{1}{2}>1$ — сходится
- $p-\frac{1}{2}\leq 1$ — расходится

Задача 4. $f=1.$, "Рог"

Решение.

$$\iint_{\text{"Рог}}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}=\sum\int_{\Omega_n}\asymp\sum\frac{1}{n^2p}\cdot\sqrt{n}$$