

Практика 5

Лука Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

$$f \geq 0 \quad \int_{\Omega} f d\mu$$

$$f - \text{суммируемая} \quad \int_{\Omega} |f| d\mu < +\infty$$

Пример.

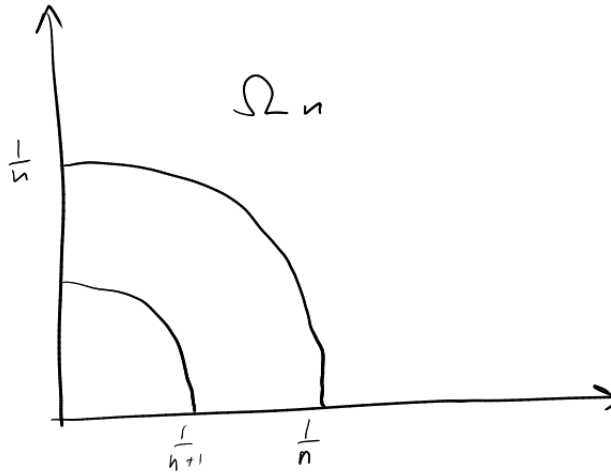
$$f = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Ω — окружность радиуса 1

$$\iint \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \sum_n \iint \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \asymp \sum \quad (1)$$

$$f, g > 0 \quad f \asymp g \quad \exists c_1, c_2 > 0 \quad c_1 f < g < c_2 f$$

$$\inf f \mu E \leq \int_E f d\mu \leq \sup f \mu E$$



в Ω_n :

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \asymp \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$n^2 \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \leq (n+1)^2 \leq 4n^2$$

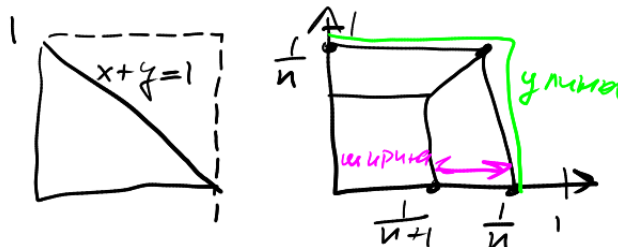
(продолжение 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot \lambda \Omega_n = \sum n^2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sim \sum \frac{c}{n}$ — расходится

Пример.

$$f = \frac{1}{x+y}$$

Ω — квадрат 1×1

$$\iint \frac{1}{x+y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint \frac{1}{x+y} \approx \sum \frac{1}{n} \quad (2)$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} < x+y \leq \frac{2}{n}$$

$$2 \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum \frac{1}{n^2} \text{ — сходится}$$

длина $\approx \frac{1}{n}$, ширина $\approx \frac{1}{n^2}$

Функции:

1.

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^p}$$

2.

$$g(x, y) = \frac{1}{|x+y|^p}$$

3.

$$h(x, y) = \frac{1}{|1 - x^2 - y^2|^p}$$

Области:

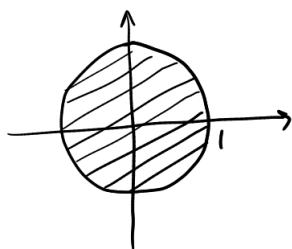


Рис. 1: Круг

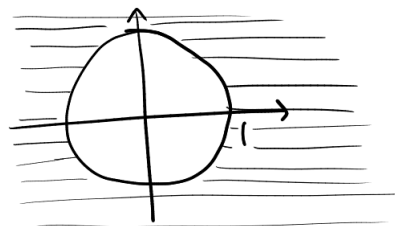


Рис. 2: Дополнение круга

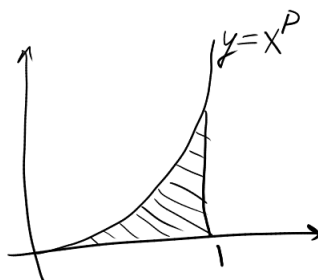


Рис. 3: Треугольник

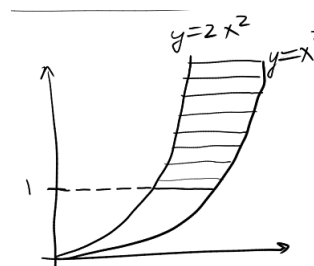


Рис. 4: "Рог"

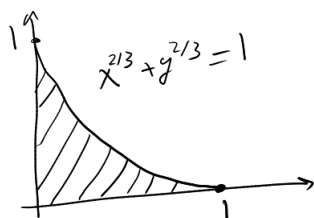


Рис. 5: Четверть астроида

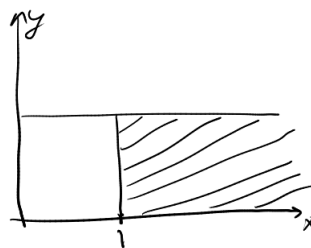


Рис. 6: Полоса

Задача 1. $f = 1$., Дополнение круга

Решение.

$$\frac{1}{(n+1)^{2p}} \leq f \leq \frac{1}{n^{2p}} \Rightarrow f \asymp \frac{1}{n^{2p}}$$

$$\frac{1}{(n+1)^{2p}} \leq f \leq \frac{1}{n^{2p}} \Rightarrow f \asymp \frac{1}{n^{2p}}$$

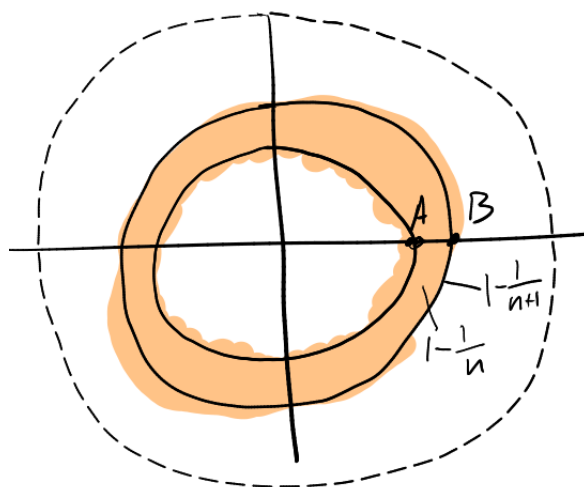
$$\iint \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint_{\Omega_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} \asymp \sum \frac{1}{n^{2p}} \cdot n = \sum \frac{1}{n^{2p-1}}$$

- $2p - 1 > 1$ – сходится
- $2p - 1 \leq 1$ – расходится

Задача 2. $f = 3$., Круг

Решение.

$$\iint_{\Omega} f = \sum_n \iint_{\Omega_n} \frac{1}{|1 - x^2 - y^2|^p} dxdy \tag{3}$$



A:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - o^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

B:

$$\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 - (x^2 + y^2) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{2}{n}$$

$$1 - (x^2 + y^2) \asymp \frac{1}{n}$$

$$f \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^p = n^p$$

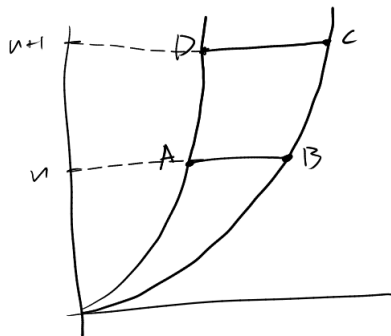
$$3 \asymp \sum n^p \cdot \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n^{2-p}}$$

- $2 - p > 1$ — сходится
- $2 - p < 1$ — расходится

Задача 3. $f = 2$, "Рог"

Решение.

$$\iint_{\Omega} f = \sum_n \iint_{\Omega_n} \quad (4)$$



$x + y$:

$$\begin{array}{llll} A(\sqrt{\frac{n}{2}}, 2) & n + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} & D & n + 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} \\ B(\sqrt{n}, n) & n + \sqrt{n} & C & n + 1 + \sqrt{n+1} \end{array}$$

$$\frac{1}{(3n)^p} \leq "D" \frac{1}{(x+y)^p} \leq "A" \frac{1}{\left(n + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^p} \leq \frac{1}{n^p}$$

$$f \asymp \frac{1}{n^p}$$

$$4 \asymp \sum \frac{1}{n^p} \cdot \sqrt{n} = \sum \frac{n^{p-\frac{1}{2}}}{n^p}$$

- $p - \frac{1}{2} > 1$ — сходится
- $p - \frac{1}{2} \leq 1$ — расходится

Задача 4. $f = 1$, "Рог"

Решение.

$$\iint_{\text{Рог}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} = \sum \int_{\Omega_n} \asymp \sum \frac{1}{n^{2p}} \cdot \sqrt{n}$$