

Практика 2

Луа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Гамма функция	1
2	Кратные интегралы	2
2.1	Изменение порядка интегрирования	3

1 Гамма функция

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \quad , x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \approx \frac{1}{\binom{x+y}{x}}$$

Формула понижения:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Формула дополнения:

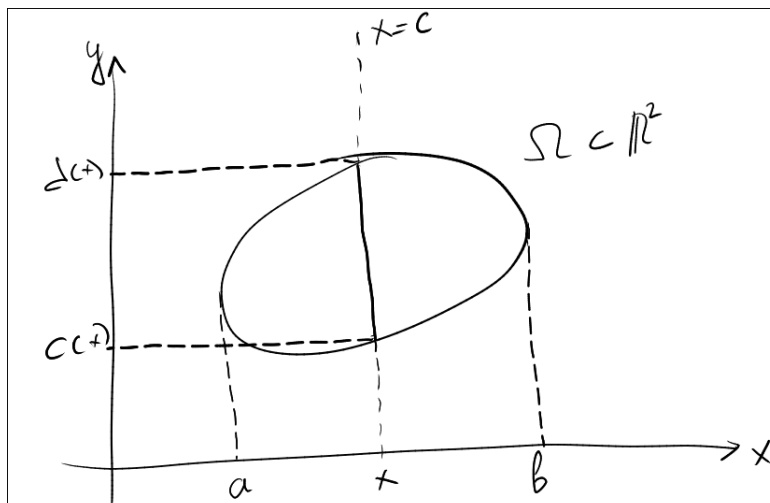
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

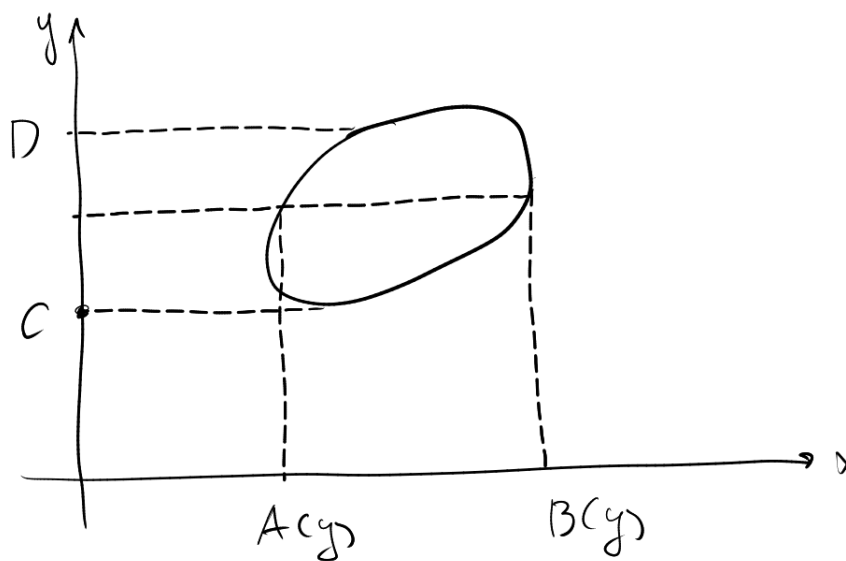
Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2021} x dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x \\ dt = 2 \sin x \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right] = \int_0^1 t^{1010,5} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1010} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(1011, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1011)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1011 + \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1010! \sqrt{\pi}}{\frac{2021}{2} \cdot \frac{2019}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{1010! \cdot 2^{1009}}{2021!!} \end{aligned}$$

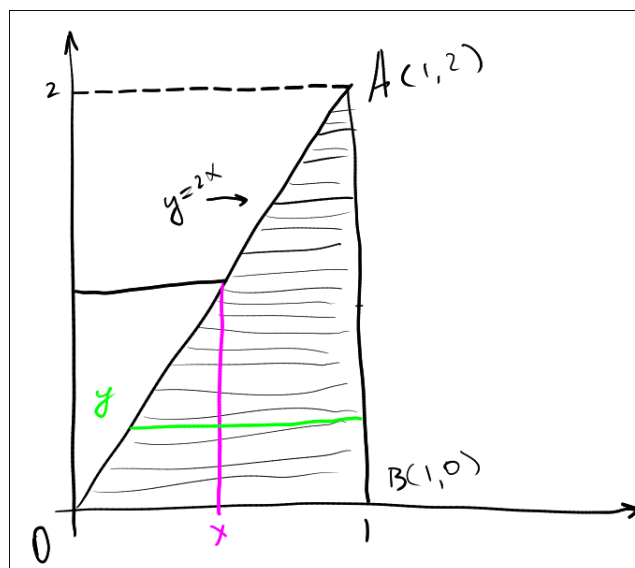
2 Кратные интегралы



$$\begin{aligned} \iint f dx dy &= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_C^D \left(\int_{A(y)}^{B(y)} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$



Пример.



$$\begin{aligned} \iint_{\Delta AOB} f dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} f dy = \\ &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 f dx \end{aligned}$$

2.1 Изменение порядка интегрирования

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f dy$$

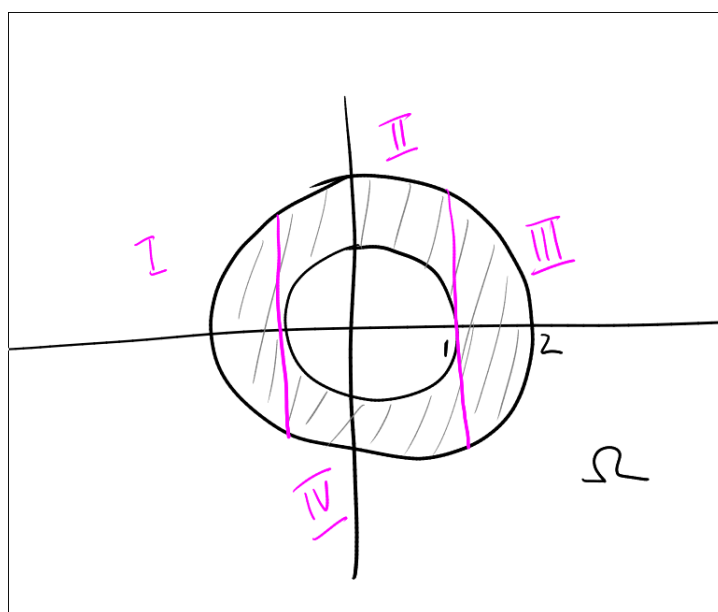
Пример.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq y} f dx dy$$

- $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ — окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в $(0, \frac{1}{2})$

Пример.

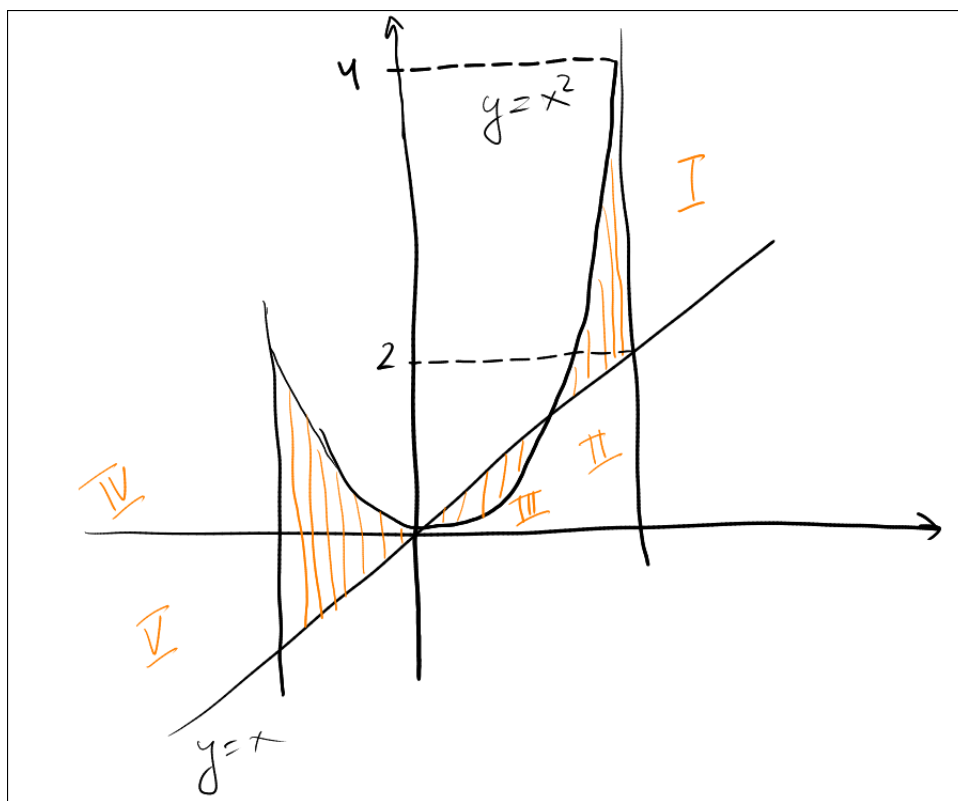
$$\iint_{\Omega} f dx dy$$



$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$II = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy$$

Пример.



$$\int_{-1}^2 dx \int_x^{x^2} f dy = \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^y f dx - \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-1}^y f dx$$