Практика 13

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Формула Стокса

$$\iint A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma\, ds = \iint \left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds =$$

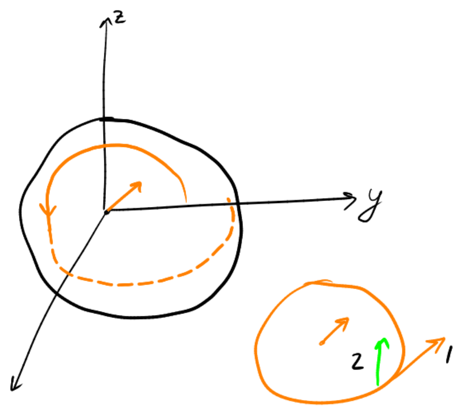
$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Задача 1.

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

Окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Решение.



$$n_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$I = \iint -dy\,dz - dz\,dx - dx\,dy = -\sqrt{3}\iint ds$$

Задача 2 (4372)**.**

$$\int_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$$

C — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,\ z > 0)$

Решение.

$$I = \int_C (x^2+y^2+z^2)\,dx + (x^2+y^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2+z^2)\,dz =$$

— это неравенство справедливо, т.к. петля замкнута и при дальнешем применении формулы Стокса добавленные слагаемые не внесут изменений

$$= \int_C 2Rx\,dx + 2Rx\,dy + 2Rx\,dz$$

Задача 3 (4323)**.** в R^2

$$\int_C \cos(\vec{l},\vec{n})\,ds = 0$$

Решение.

$$x(t)\ y(t) \quad \tau = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\int A\,dx + B\,dy = Ax' + By'\,dt = \int\limits_{\substack{\text{против} \\ \text{ч.с.}}} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = \iint -A'_y + B'_x\,dx\,dy$$

$$I = \pm \int l_1 \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - l_2 \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,ds = \pm \int_{t_0}^{t_1} l_1 y' - l_2 x'\,dt =$$

, где $|\vec{l}| = 1$, натуральная параметризация

$$= \pm \int -l_2\,dx + l_1\,dy = 0$$

Задача 4 (4324)**.**

$$\int_C x\cos(\vec{n},x) + y\cos(\vec{n},y)\,ds$$

Решение.

$$I = \int_C -y\,dx + x\,dy + 2\iint dx\,dy = 2S$$

Задача 5 (4391)**.**

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n_0})\,ds$$
$$\vec{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\iint \left\langle \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \xi - x \\ \eta - y \\ \zeta - z \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds = \frac{1}{2}\iiint$$

$$= \frac{1}{2}\iint \frac{\xi - x}{2}\,d\eta\,d\xi + \frac{\eta - y}{2}\,d\xi\,d\zeta + \frac{\zeta - z}{2}\,d\xi\,d\eta$$

Задача 6 (4392)**.**

$$\iint \frac{\cos \vec{r},\vec{n}}{r^2}\,ds$$

Решение.

$$I = \iint_C \frac{\xi - x}{r^3}\,d\eta\,d\zeta + \frac{\eta - y}{r^3}\,d\xi\,d\zeta + \frac{\zeta - z}{r^3}\,d\xi, d\eta =$$

$$= \iiint \left(\frac{1}{r^3} - 3\cdot\frac{(\xi - x)^2}{r^3}\right) + B'\eta + C'\zeta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0 \tag{1}$$

1 это формул Остроградского

Задача 7 (4393)**.**

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} = \iiint \Delta u\,dx\,dy\,dz \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Замечание. Производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot l_2 + \dots$$