

Практика 13

Пуга Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Формула Стокса

1

1 Формула Стокса

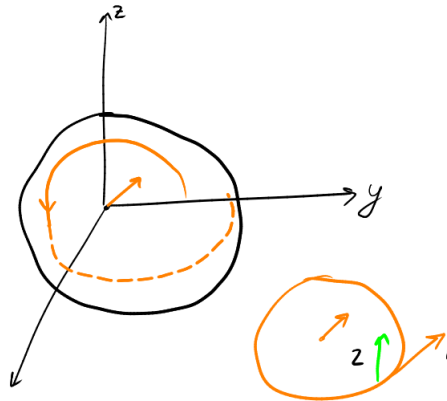
$$\begin{aligned} \iint A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma \, ds &= \iint \left\langle \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds = \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Задача 1.

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

Окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Решение.



$$n_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$I = \iint -dy \, dz - dz \, dx - dx \, dy = -\sqrt{3} \iint ds$$

Задача 2 (4372).

$$\int_C (y^2 + z^2) \, dx + (x^2 + z^2) \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$$

C — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$, $z > 0$)

Решение.

$$I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dx + (x^2 + y^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz =$$

— это неравенство справедливо, т.к. петля замкнута и при дальнейшем применении формулы Стокса добавленные слагаемые не внесут изменений

$$= \int_C 2Rx dx + 2Rx dy + 2Rx dz$$

Задача 3 (4323). в R^2

$$\int_C \cos(\vec{l}, \vec{n}) ds = 0$$

Решение.

$$x(t) \quad y(t) \quad \tau = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\int A dx + B dy = \int_{\text{против ч.с.}} Ax' + By' dt = \int A(x, y) dx + B(x, y) dy = \iint -A'_y + B'_x dx dy$$

$$I = \pm \int l_1 \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - l_2 \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} ds = \pm \int_{t_0}^{t_1} l_1 y' - l_2 x' dt =$$

, где $|\vec{l}| = 1$, натуральная параметризация

$$= \pm \int -l_2 dx + l_1 dy = 0$$

Задача 4 (4324).

$$\int_C x \cos(\vec{n}, x) + y \cos(\vec{n}, y) ds$$

Решение.

$$I = \int_C -y dx + x dy + 2 \iint dx dy = 2S$$

Задача 5 (4391).

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}_0) ds$$

$$\vec{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$

Решение.

$$I = \frac{1}{2} \iint \left\langle \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \xi - x \\ \eta - y \\ \zeta - z \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds = \frac{1}{2} \iiint$$

$$= \frac{1}{2} \iint \frac{\xi - x}{2} d\eta d\xi + \frac{\eta - y}{2} d\xi d\zeta + \frac{\zeta - z}{2} d\xi d\eta$$

Задача 6 (4392).

$$\iint \frac{\cos \vec{r}, \vec{n}}{r^2} ds$$

Решение.

$$I = \iint_C \frac{\xi - x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\zeta + \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta =$$

$$= \iiint \left(\frac{1}{r^3} - 3 \cdot \frac{(\xi - x)^2}{r^3} \right) + B'\eta + C'\zeta d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (1)$$

1 это формул Остроградского

Задача 7 (4393).

$$\iiint_S \frac{\partial u}{\partial n} = \iiint \Delta u dx dy dz \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Примечание. Производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot l_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot l_2 + \dots$$