Практика 12

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

Задача 1 (4382)**.**

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$
$$= \frac{1}{3}\iint x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

Задача 2 (4391)**.** Доказать формулу

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(r, n)\,dS$$
$$r = \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2}$$

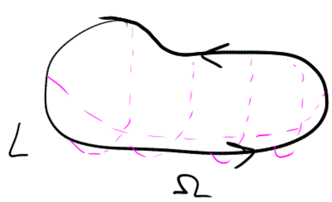
Решение.

$$r = \begin{pmatrix} \xi - x_0 \\ \eta - y_0 \\ \zeta - z_0 \end{pmatrix}$$
$$I = \frac{1}{2}\iint \frac{\xi - x_0}{r}\,d\eta\,d\zeta + \frac{\eta - y_0}{r}\,d\zeta\,d\xi + \frac{\zeta - z_0}{r}\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{1}{2}\iiint \frac{1}{r} - \frac{(\xi - x_0)^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{(\eta - y_0)^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{(\zeta - z_0)}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint \frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

1 Формула Стокса

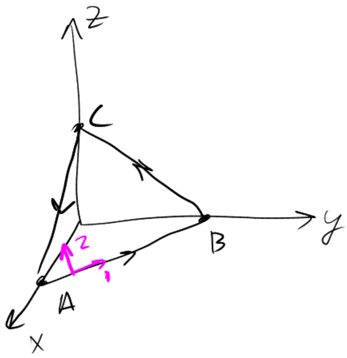
Вычисляем по кривой

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \left\langle \mathrm{rot}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds =$$
$$= \iint_\Omega (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_x - R'_z)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$



Здесь сторона Ω согласована с направлением на кривой L

Задача 3.



$$\int_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$$
$$\Omega = \triangle ABC$$
$$n = (1,1,1)$$

Решение.

$$I = \iint\limits_{\triangle} -2z\,dy\,dz - 2x\,dz\,dx - 2y\,dx\,dy = \iint\limits_{\triangle} -2\underbrace{(x+y+z)}_{a}\,dS = -2a\cdot S_{\triangle ABC} = -2a\cdot\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{BC}|$$

Задача 4.

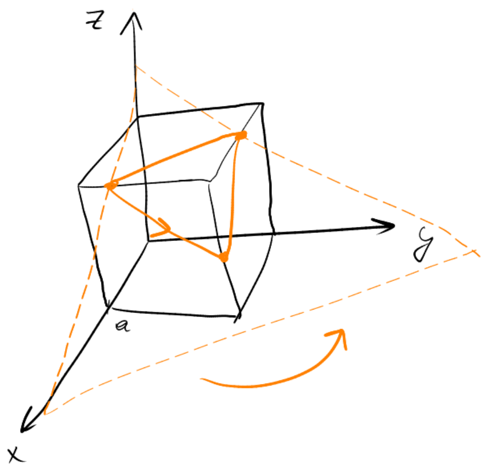
$$\int (x^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$$

L: границы сечения куба

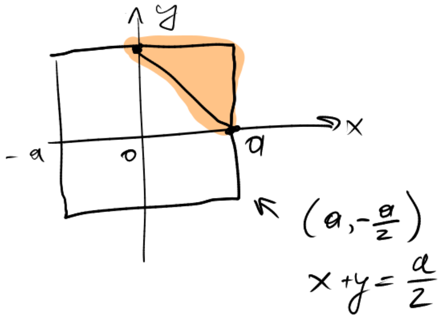
$$|x| \le a \quad |y| \le a \quad |z| \le a$$

плоскостью $x + y + z = \frac{3a}{2}$
ориентированно положительно относительно $(1,0,0)$

Решение.



$n = (1, 1, 1)$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{3a}{2} - x - y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I = \iint\limits_{\triangle} -2y\,dy\,dz - (2z + 2x)\,dz\,dx - 2x\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{a} dx \int_{\frac{a}{2}-x}^{a} -2y \cdot (-1) - (3a - 2x - 2y + 2x) \cdot 1 - 2x \cdot 1\,dx\,dy$$

Задача 5.

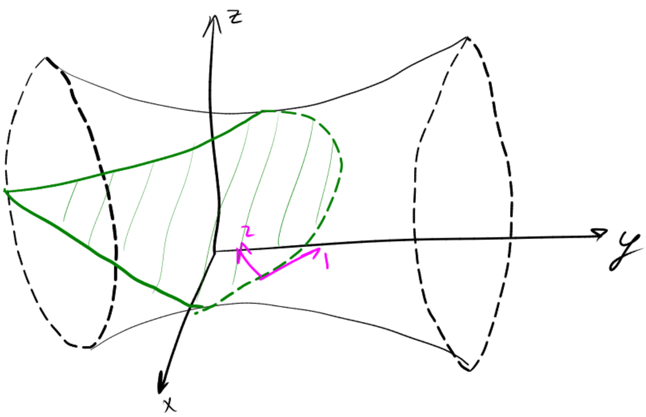
$$\int z^3\,dx + x^3\,dy + y^3\,dz$$

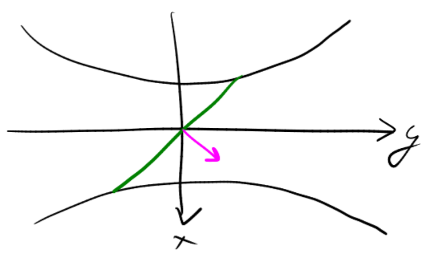
$$L : \left| \begin{matrix} 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{matrix} \right.$$

Решение.

$$2x^2 + z^2 = (-x^2) + a^2$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = -x \end{cases}$$





$$I = \iint 3y^2\,dy\,dz + 3z^2\,dz\,dx + 3x^2\,dx\,dy =$$

$$= 3\iint \left\langle \begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dS = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint \underbrace{y^2 + z^2}_{\substack{=x^2+z^2 \\ =a^2}} ds =$$

$$= \frac{3a^2}{\sqrt{2}} \iint ds = \frac{3a^2}{\sqrt{2}} S = \frac{3a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi a^2}{\cos(\text{угол между } xOz, \text{ и плоскостью } x + y = 0)}$$

Задача 6.

$$\int (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$$

$$L : \left| \begin{matrix} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = \frac{ht}{2\pi} \end{matrix} \right. \quad t \in [0; 2\pi]$$

Решение. Ротор равен нулю

$$AB : \begin{matrix} x = a \\ y = 0 \end{matrix} \quad z = t \quad t \in [0; h]$$

$$I = -\int_{AB} \dots = -\int_a^l t^2\,dt$$