

# Практика 12

Лука Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

## Содержание

### 1 Формула Стокса

1

**Задача 1** (4382).

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \\ &= \frac{1}{3} \iint x dy dz + y dz dx + z dx dy \end{aligned}$$

**Задача 2** (4391). Доказать формулу

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} &= \frac{1}{2} \iint_S \cos(r, n) dS \\ r &= \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2} \end{aligned}$$

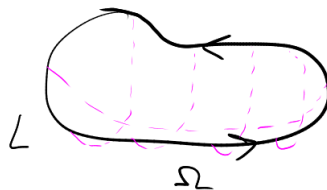
*Решение.*

$$\begin{aligned} r &= \begin{pmatrix} \xi - x_0 \\ \eta - y_0 \\ \zeta - z_0 \end{pmatrix} \\ I &= \frac{1}{2} \iint \frac{\xi - x_0}{r} d\eta d\zeta + \frac{\eta - y_0}{r} d\zeta d\xi + \frac{\zeta - z_0}{r} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \iiint \frac{1}{r} - \frac{(\xi - x_0)^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{(\eta - y_0)^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{(\zeta - z_0)^2}{r^3} d\xi d\eta d\zeta = \iiint \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

## 1 Формула Стокса

Вычисляем по кривой

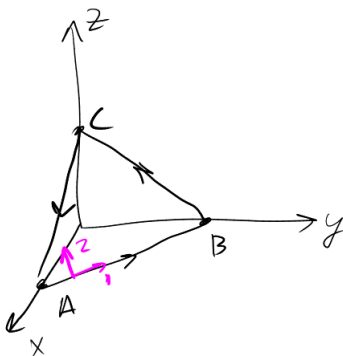
$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Omega} \left\langle \operatorname{rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, n_0 \right\rangle ds = \\ &= \iint_{\Omega} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_x - R'_z) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy \end{aligned}$$



Здесь сторона  $\Omega$  согласована с направлением на кривой  $L$



**Задача 3.**



$$\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

$$\Omega = \triangle ABC$$

$$n = (1, 1, 1)$$

Решение.

$$I = \iint_{\Delta} -2z dy dz - 2x dz dx - 2y dx dy = \iint_{\Delta} -2 \underbrace{(x+y+z)}_a dS = -2a \cdot S_{\Delta ABC} = -2a \cdot \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}|$$

**Задача 4.**

$$\int (x^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

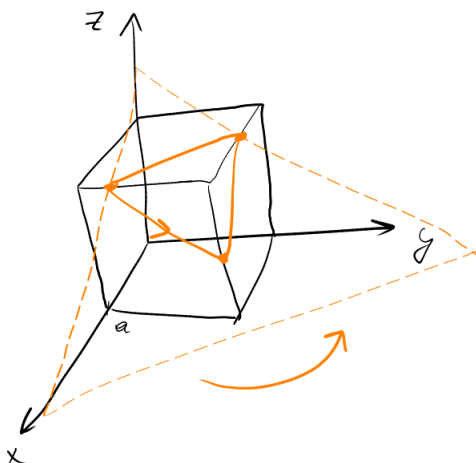
L: границы сечения куба

$$|x| \leq a \quad |y| \leq a \quad |z| \leq a$$

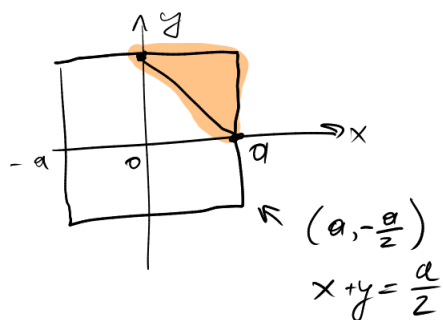
плоскостью  $x + y + z = \frac{3a}{2}$

ориентированно положительно относительно  $(1, 0, 0)$

Решение.



$$n = (1, 1, 1)$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{3a}{2} - x - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I = \iint_{\Delta} -2y \, dy \, dz - (2z + 2x) \, dz \, dx - 2x \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^a dx \int_{\frac{a}{2}-x}^a -2y \cdot (-1) - (3a - 2x - 2y + 2x) \cdot 1 - 2x \cdot 1 \, dx \, dy$$

**Задача 5.**

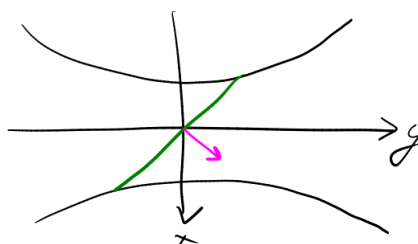
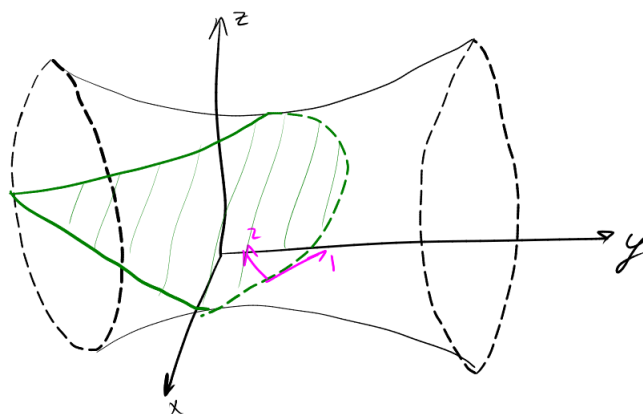
$$\int z^3 \, dx + x^3 \, dy + y^3 \, dz$$

$$L: \begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

*Решение.*

$$2x^2 + z^2 = (-x^2) + a^2$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = -x \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
I &= \iint 3y^2 dy dz + 3z^2 dz dx + 3x^2 dx dy = \\
&= 3 \iint \left\langle \begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dS = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint \underbrace{y^2 + z^2}_{=x^2+z^2} ds = \\
&= \frac{3a^2}{\sqrt{2}} \iint ds = \frac{3a^2}{\sqrt{2}} S = \frac{3a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi a^2}{\cos(\text{угол между } xOz, \text{ и плоскостью } x + y = 0)}
\end{aligned}$$

**Задача 6.**

$$\int (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz$$

$$L : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = \frac{ht}{2\pi} \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

*Решение.* Ротор равен нулю

$$AB : \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \quad z = t \quad t \in [0; h]$$

$$I = - \int_{AB} \dots = - \int_a^t t^2 dt$$