

Практика 11

Лука Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Задания с КР	1
2	Задания с ДЗ	1
3	Формула Гаусса-Остроградского	2
4	ДЗ	4

1 Задания с КР

Задача 1.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 17 \\x^2 + y^2 &= z^2 - 0 \quad z > 0\end{aligned}$$

Решение.

- $2z^2 - 9 = 17$
- $z^2 = 13$
- $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos \varphi \quad y = 2 \sin \varphi \quad z = \sqrt{13} \\ \int_0^{2\pi} (x + y + 1) dx + \dots\end{aligned}$$

Задача 2.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad y > 0 \quad x + y < a \quad z > 0 \\x^2 + y^2 + z^2 &= a^2\end{aligned}$$

2 Задания с ДЗ

Задача 3.

$$\begin{aligned}\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \bar{n}_0 \right\rangle ds &= \iint_S a ds = 4\pi a^3 \\x^2 + y^2 + z^2 &= a^2\end{aligned}$$

Задача 4.

$$\begin{aligned}\iint \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\end{aligned}$$

Решение. Нельзя ли сделать замену

$$\tilde{x} = \frac{x}{a} \quad \tilde{y} = \frac{y}{b} \quad \tilde{z} = \frac{z}{c}$$

Вводим сферические координаты

$$\begin{aligned}x &= a \cos \varphi \cos \psi \\y &= b \sin \varphi \cos \psi \\z &= c \sin \psi\end{aligned}$$

3 Формула Гаусса-Остроградского

Если фигура Ω — граница некоторой трехмерной фигуры

$$\iint_{\Omega, \text{внеш. сторона}} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V P'_x + Q'_y + R'_z \, dx \, dy \, dz$$

$$\Omega = \partial V \quad (P, Q, R) \in C^1(\text{окр}(V))$$

Задача 5 (4362).

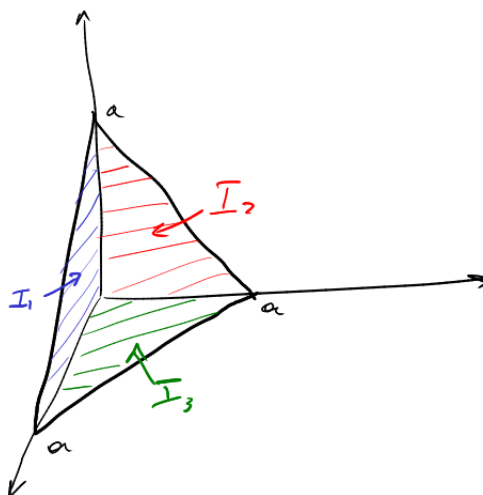
$$\iint x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \iiint_{\text{шар}} 3 \, dz = -3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$$

Задача 6.

$$\iint_{\Delta} \underbrace{x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy}_{\omega} = I$$

$$x + y + z = a \quad x, y, z > 0$$

Решение.

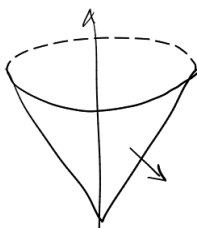


Получается тетраэдр T ,

$$I + I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{\partial T} \omega = -3 \iiint_T x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$I_3 = \iint_{\substack{x, y > 0, z=0 \\ x+y < a}} \omega = 0$$

Задача 7. Есть коническая воронка (перевернутый конус)



$$x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$\iint z \, dx \, dy + (5x + y) \, dy \, dz$$

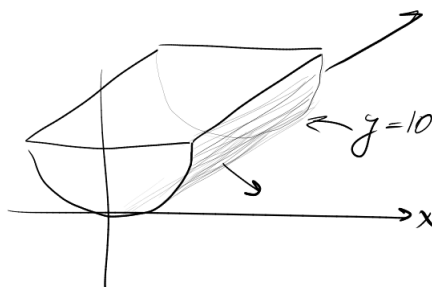
Решение.

$$I = \iiint_{\text{конус}} 6 \, dx \, dy \, dz = 6 \cdot \frac{1}{3} \pi = 2\pi$$

$$I + \iint_{\text{вверх}} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left\langle \begin{pmatrix} 5x+y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = \pi$$

Задача 8.

$$\iint_{\substack{\text{береста} \\ \text{вниз}}} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$



Решение.

$$I + \iint_{\substack{y=0 \\ \text{на нас} \\ =0}} + \iint_{\substack{y=10 \\ \text{от нас} \\ =100 \cdot \frac{\pi a^2}{2}}} + \iint_{\text{вверх}} = 100 \cdot 10 \cdot 2a$$

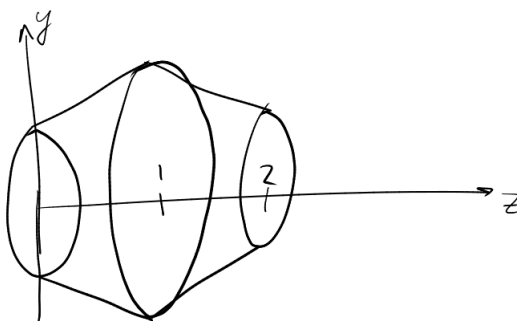
$$= \iiint_{\text{полено}} 2(x+y+z) \, dx \, dy \, dz + 0 + \frac{1}{2} \pi a^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{10} + \int_0^a 27 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{a^2 - z^2} \, dz$$

Задача 9.

$$y = 2 - |z - 1| \quad z \in [0, 2]$$

$$\iint x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

Решение.



$$I + \iint_{\substack{\text{влево} \\ z=0}} + \iint_{\substack{\text{вправо} \\ z=2}} =$$

$$= \iiint 2x + 2y + 2z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 2z \cdot \pi |z + 1|^2 + \int_1^2 2z \cdot \pi (2 - z)^2$$

Задача 10 (4358.1).

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi$$

$$y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi$$

$$z = a \sin \psi$$

Объем?

Решение. Это тор

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_{\substack{\Omega \\ \text{внеш}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \, ds \end{aligned}$$

4 ДЗ

4381, 4385, 4386, 4387-89