Практика 11

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Задания с КР

Задача 1.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 17$$
$$x^2 + y^2 = z^2 - 0 \quad z > 0$$

Решение.

- $2z^2 - 9 = 17$
- $z^2 = 13$
- $x^2 + y^2 = 4$

$$x = 2\cos\varphi \quad y = 2\sin\varphi \quad z = \sqrt{13}$$
$$\int_0^{2\pi} (x + y + 1)\, dx + \dots$$

Задача 2.

$$x > 0 \quad y > 0 \quad x + y < a \quad z > 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

2 Задания с ДЗ

Задача 3.

$$\iint_S \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overline{n_0} \right\rangle ds = \iint_S a\, ds = 4\pi a^3$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Задача 4.

$$\iint \frac{dy\, dz}{x} + \frac{dz\, dx}{y} + \frac{dx\, dy}{z}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Решение. Нельзя ли сделать замену

$$\tilde{x} = \frac{x}{a} \quad \tilde{y} = \frac{y}{b} \quad \tilde{z} = \frac{z}{c}$$

Вводим сфрические координаты

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = b\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = c\sin\psi$$

3 Формула Гаусса-Остроградского

Если фигура Ω — граница некоторой трехмерной фигуры

$$\iint\limits_{\Omega,\text{внеш. сторона}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V} P'_x + Q'_y + R'_z\,dx\,dy\,dz$$

$$\Omega = \partial B \quad (P, Q, R) \in C^1(\text{окр}(V))$$

Задача 5 (4362).

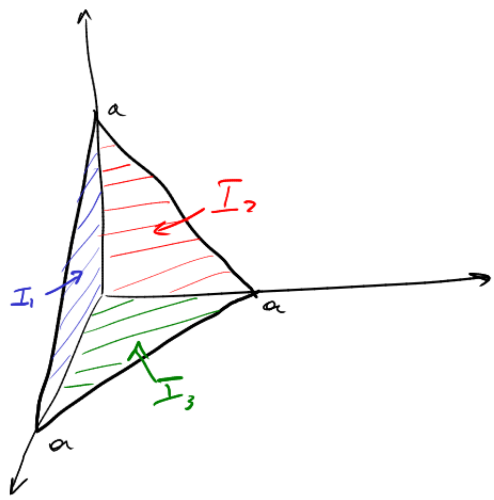
$$\iint x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iiint\limits_{\text{шар}} 3\,dz = -3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

Задача 6.

$$\iint_{\triangle} \underbrace{x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy}_{\omega} = I$$

$$x + y + z = a \quad x, y, z > 0$$

Решение.

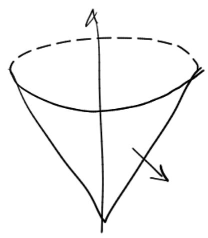


Получается тетраэдр T,

$$I + I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{\partial T} \omega = -3 \iiint_T x^2 + y^2 + z^2\,dx\,dy\,dz$$

$$I_3 = \iint\limits_{\substack{x,y>0,z=0\\x+y<a}} \omega = 0$$

Задача 7. Есть коническая воронка(перевернутый конус)



$$x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \le z \le 1$$

$$\iint z\,dx\,dy + (5x + y)\,dy\,dz$$

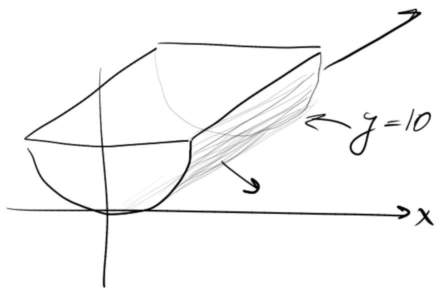
Решение.

$$I = \iiint\limits_{\text{конус}} 6\,dx\,dy\,dz = 6 \cdot \frac{1}{3}\pi = 2\pi$$

$$I + \iint\limits_{\text{вверх}} = \iint\limits_{x^+y^2\leq 1} \left\langle \begin{pmatrix} 5x+y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy = \pi$$

Задача 8.

$$\iint\limits_{\substack{\text{береста} \\ \text{вниз}}} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$



Решение.

$$I + \iint\limits_{\substack{y=0 \\ \text{на нас} \\ =0}} + \iint\limits_{\substack{y=10 \\ \text{от нас} \\ =100\cdot\frac{\pi a^2}{2}}} + \iint\limits_{\substack{\text{вверх} \\ =100\cdot 10\cdot 2a}}$$

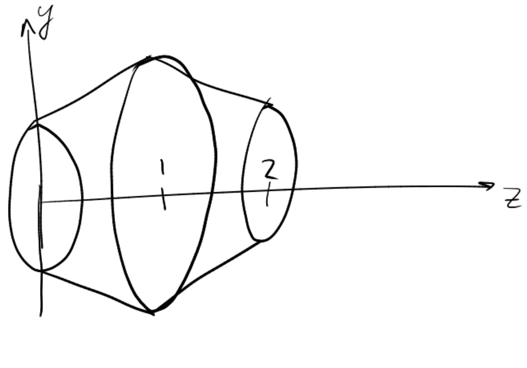
$$= \iiint\limits_{\text{полено}} 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz + 0 + \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{10} + \int_0^a 27\cdot 10\cdot 2\sqrt{a^2-z^2}\,dz$$

Задача 9.

$$y = 2 - |z-1| \quad z\in[0,2]$$

$$\iint x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

Решение.



$$I + \iint\limits_{\substack{\text{влево} \\ z=0}} + \iint\limits_{\substack{\text{впарво} \\ z=2}} =$$

$$= \iiint 2x+2y+2z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 2z\cdot\pi|z+1|^2 + \int_1^2 2z\cdot\pi(2-z)^2$$

Задача 10 (4358.1)**.**

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$$
$$y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$$
$$z = a\sin\psi$$

Объем?

Решение. Это тор

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{\substack{\Omega \\ \text{внеш}}} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{\Omega} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\,ds$$

4 ДЗ

4381, 4385, 4386, 4387-89