Практика 1

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Интегралы по пути

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
- $x(t), y(t), z(t)$

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Qy' + Rz')dt$$

$$\text{длинна пути} = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

Задача 1. прямоугольный треугольник с вершинами $O = (0, 0), B = (1, 0), A = (0, 1)$.

Решение.

$$\int_\triangle (x + y)ds = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{OB}$$

OA

$$x(t) = t \quad y(t) = 0 \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$$

$$\int_{OA} = \int_0^1 t \cdot 1dt = \frac{1}{2}$$

AB

$$x(t) = t \quad y(t) = 1 - t \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2}$$

$$\int_{AB} = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2}dt = \sqrt{2}$$

OB

$$x(t) = 0 \quad y(t) = t \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$$

$$\int_{OB} = \frac{1}{2}$$

Задача 2. Парабола

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

Решение.

$$x(t) = t \quad y(t) = t^2 \quad t \in [-1, 1]$$

$$\int_C \cdots = \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t) \cdot 1 + (t^4 - 2t^3) \cdot 2tdt$$

Используя обощенную формулу Ньютона Лейбница для потенциальных векторных полей

$$\int Pdx + Qdy + Rdz$$

Убедимся, что поле не потенциальное

$$P'_y = Q'_x$$
$$P'_z = R'_x$$
$$Q'_z = R'_y$$